

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ И.Н. УЛЬЯНОВА»

На правах рукописи

Чаадаева Татьяна Игорьевна

КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ
МОДИФИЦИРОВАННОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ
ВИДА $f(R, (\nabla R)^2, \square R)$

Специальность 1.3.3. Теоретическая физика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
Червон Сергей Викторович
доктор физико-математических наук,
профессор

Оглавление

	Стр.
Введение	5
Глава 1. Краткий обзор модифицированных теорий	
гравитации высшего порядка	15
1.1 $f(R)$ -гравитация высшего порядка	16
1.2 Построение эйнштейновской теории гравитации со скалярными полями для $f\left(R, (\nabla R)^2, \square R\right)$ -гравитации	19
1.3 Построение скалярно-мульти-тензорного эквивалента для $f(R)$ -гравитации высшего порядка	20
1.4 Скалярно-тензорные теории гравитации высших порядков	25
1.5 Киральные космологические модели	28
1.6 Выводы к Главе 1	31
Глава 2. Космологическая динамика на основе	
$f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R)\nabla_\mu R\nabla^\mu R$-гравитации	33
2.1 Уравнения гравитационного поля для $f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R)\nabla_\mu R\nabla^\mu R$ -гравитации	33
2.2 Уравнения космологической динамики на основе $f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R)\nabla_\mu R\nabla^\mu R$ -гравитации	37
2.3 Представление $f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R)\nabla_\mu R\nabla^\mu R$ гравитации в виде тёмной космической жидкости	39
2.4 Скалярно-тензорный эквивалент для $f_1(R) + X(R)\nabla_\mu R\nabla^\mu R$ -гравитации	45
2.5 Выводы к Главе 2	49
Глава 3. Киральная космологическая модель	
$f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R)\nabla_\mu R\nabla^\mu R$-гравитации	52
3.1 Переход к киральной космологической модели	52
3.2 Примеры специальных решений	55
3.3 Космологические модели с дополнительным материальным полем	60
3.4 Геометрическая связь между решениями	63

3.5	Спектральные космологические параметры $f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R)\nabla_\mu R\nabla^\mu R$ -гравитации	64
3.6	Выводы к Главе 3	72
Глава 4. Киральная космологическая модель		
	$f(R, \square R)$ -гравитации	75
4.1	Переход к киральной космологической модели	76
4.2	Условия режима медленного скатывания	78
4.3	Дополнительное материальное поле и космологические решения	79
4.4	Свойства дополнительного материального поля для расширения квази-де Ситтера	82
4.5	Построение однополевой киральной космологической модели	83
4.6	Космологическая динамика при заданной форме потенциала скалярного поля	85
4.6.1	Космологическая динамика в условиях режима медленного скатывания	89
4.6.2	Космологическая динамика на основе метода суперпотенциала	92
4.7	Выводы к Главе 4	93
Глава 5. Киральная космологическая модель		
	$f(R, (\nabla R)^2, \square R)$ -гравитации	96
5.1	Киральная космологическая модель $f(R, (\nabla R)^2, \square R)$ -гравитации	96
5.2	Модель с уменьшенным порядком производных по скалярному полю	99
5.3	Уравнения космологической динамики	101
5.4	Космологические и инфляционные решения при заданной форме потенциала киральных полей	102
5.5	Выводы к Главе 5	109
	Заключение	112
	Список сокращений и условных обозначений	117
	Список терминов	118

Список литературы	119
Приложение А. Преобразование интегралов с производными от метрики	132
Приложение Б. След уравнения гравитационного поля для $f(R, (\nabla R)^2, \square R)$ -гравитации	133

Введение

Актуальность темы исследования

Космология – наука о Вселенной в целом, её глобальных свойствах и физических процессах, происходящих в ней [1]. Формирование и эволюция Вселенной описывается теорией гравитации Эйнштейна [3–5]. Согласно этой теории, гравитация рассматривается как искривление пространства-времени. Уравнения гравитации Эйнштейна позволяют моделировать динамику пространства-времени и связывать его с материей и энергией Вселенной. Предсказания теории согласуются с наблюдениями, включая ускоренное расширение Вселенной и наличие гравитационных волн [6, 7].

Астрономические наблюдения подтверждают гипотезу Большого взрыва, которая описывает эволюцию Вселенной от горячего плотного состояния. Эта теория объясняет явления первичного нуклеосинтеза и последующего расширения. Согласно современным представлениям, инфляционная стадия ранней Вселенной – период ускоренного расширения Вселенной. За ней последовали стадии замедленного расширения, обусловленные доминированием сначала излучения, а затем материи. С конца XX века, с появлением точных наблюдательных данных, стало очевидно, что классическая теория гравитации не может в полной мере объяснить наблюдаемое ускоренное расширение Вселенной на современном этапе. Это требует введения понятия тёмной энергии как источника ускорения и служит стимулом к развитию модифицированных теорий гравитации (МТГ).

Модель Фридмана основана на решениях уравнений Эйнштейна для однородной и изотропной Вселенной с учётом кривизны пространства и состава космической жидкости. Инфляционная модель расширяет этот подход, вводя фазу ускоренного экспоненциального расширения, обусловленную доминированием скалярного поля с отрицательным давлением. Эта фаза устраняет проблемы горизонта и плоскостности, а также генерирует квантовые флуктуации, служащие начальными условиями для формирования крупномасштабной структуры Вселенной. Таким образом, инфляционная модель дополняет теорию Большого взрыва и модель Фридмана, связывая быструю начальную стадию расширения с последующим более медленным развитием Вселенной.

В космологии существует несколько моделей, описывающих инфляционную стадию расширения Вселенной: модель А. Старобинского, основанная на квантовых поправках к гравитации, в которой впервые была предложена идея ускоренного расширения [8]; инфляционная модель А. Гута со скалярным полем (инфлатоном), вызывающим экспоненциальный рост темпа расширения пространства [9]; хаотическая инфляция А. Линде, предполагающая разнообразные начальные условия [10]; модели эволюции скалярных полей с различными видами потенциала [11, 12]; киральные космологические модели [13].

Все перечисленные модели объединяет идея короткого периода быстрого экспоненциального расширения, который позволяет разрешить основные проблемы модели горячей Вселенной [14] и сформировать начальные условия для дальнейшей эволюции Вселенной.

Геометрия пространства де Ситтера [15] описывает фазу быстрого экспоненциального расширения ранней Вселенной, в которой плотность энергии вакуума обладает отрицательным давлением, равным по величине плотности энергии, что обеспечивает ускоряющийся рост масштабного фактора. Пространство де Ситтера соответствует состоянию с доминированием космологической постоянной на ранних этапах эволюции Вселенной. После окончания этой фазы Вселенная переходит к расширению в режиме доминирования вещества, где роль космологической постоянной становится менее значимой.

Первоначальная модель, учитывающая фазу де Ситтера, была предложена А. Старобинским в 1980 году [8]. В ней описывается ранняя Вселенная с экспоненциальным расширением, обусловленным квантовыми эффектами и эффективной космологической постоянной. Позже стадия ускоренного расширения Вселенной, предложенная А. Гутом [9], получила название инфляции. Именно экспоненциальное расширение позволяет разрешить ключевые проблемы модели горячей Вселенной.

Современные исследования продолжают расширять и уточнять модели инфляции, рассматривая возможность наличия нескольких этапов инфляции, а также нелинейные и квантовые эффекты влияния скалярных полей на динамику космоса [16, 17]. Кроме того, инфляционные механизмы активно применяются для объяснения поздних этапов космологической эволюции, в частности природы тёмной энергии и ускоренного расширения современной Вселенной [18, 19].

Одним из направлений МТГ является $f(R)$ -гравитация, в которой скалярная кривизна R в действии Эйнштейна–Гильберта:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (1)$$

заменяется на более общую функцию скалярной кривизны $f(R)$:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} f(R). \quad (2)$$

Особое значение имеет вклад А. Старобинского, предложившего модель инфляции на основе модифицированной гравитации с добавлением квадратичного слагаемого R^2 в действие $f(R)$ -гравитации, что описывает инфляцию и согласуется с современными наблюдениями [29]. Модели высшего порядка с производными скалярной кривизны расширяют эту идею и создают возможности для более сложных и реалистичных космологических сценариев [23, 30, 31].

Другой класс модификаций – скалярно-тензорные теории гравитации, в которых к метрике, описывающей гравитационное взаимодействие (искривление пространства-времени), добавляется одно или несколько скалярных полей. Такие подходы расширяют описание эволюции Вселенной и объясняют влияние гравитационной постоянной, инфляцию и другие космологические феномены.

Модифицированные теории гравитации, в частности $f(R)$ -гравитация и скалярно-тензорные теории, представляют перспективное направление для объединения наблюдательных данных с теоретическими моделями и преодоления ограничений классической теории. В данной диссертационной работе исследуются модели МТГ, учитывающие влияние квантовых поправок, проявляющихся в наличии производных высшего порядка от скалярной кривизны. Такой подход позволяет описывать эволюцию Вселенной на всех стадиях и прогнозировать параметры космологических возмущений – спектр мощности, спектральный индекс скалярных и тензорных мод, а также тензорно-скалярное отношение. При этом инфляционные сценарии в рассматриваемых моделях могут быть согласованы с данными космических обсерваторий.

Цель и задачи исследования

Целью исследования является изучение космологической динамики и космологических возмущений в модифицированной теории гравитации вида $f(R, (\nabla R)^2, \square R)$ и её усечённых версий $f(R, (\nabla R)^2)$, $f(R, \square R)$, нахождение решений, описывающих стадию инфляции, а также сопоставление полученных теоретических предсказаний с наблюдательными данными.

Для достижения цели были поставлены задачи:

1. Найти решения дифференциальных уравнений космологической динамики модифицированной теории гравитации вида $f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R)\nabla_\mu R\nabla^\mu R$, содержащих производные 6-го порядка от масштабного фактора по времени t .
2. Найти скалярно-тензорный эквивалент для $f(R, (\nabla R)^2)$ -, $f(R, \square R)$ -, $f(R, (\nabla R)^2, \square R)$ -гравитации и на их основе построить киральные космологические модели.
3. Найти точные и приближенные решения уравнений космологической динамики для киральных космологических моделей, соответствующих $f(R, (\nabla R)^2)$ -, $f(R, \square R)$ -, $f(R, (\nabla R)^2, \square R)$ -гравитации.
4. Разработать метод сведения многополевых киральных космологических моделей, соответствующих $f(R, (\nabla R)^2)$ -, $f(R, \square R)$ -гравитации, к модели с одним скалярным полем для возможности сопоставления предсказаний спектральных космологических параметров по наблюдательным данным.

Научная новизна

Научная новизна отражена в результатах, полученных впервые в диссертационном исследовании:

1. Получен общий вид уравнений модифицированной теории гравитации вида $f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R)\nabla_\mu R\nabla^\mu R$ для произвольной метрики; записаны уравнения космологической динамики для однородной и изотропной вселенной Фридмана; найдены точные решения для экспоненциальной и квазиэкспоненциальной (близкой к экспоненциальной) эволюции масштабного фактора.
2. Действие модифицированной теории гравитации вида $f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R)\nabla_\mu R\nabla^\mu R$ представлено в терминах скалярно-мульти-тензорной теории гравитации, обобщающее действие модели Старобинского–Подольского.
3. Уравнения космологической динамики модифицированной теории гравитации вида $f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R)\nabla_\mu R\nabla^\mu R$ записаны с учётом вклада тёмной энергии. Для специальной формы функций $f_1(\phi)$, $X(\phi)$ получены точные аналитические решения уравнений космологической динамики для произвольной эволюции скалярного поля $\phi(t)$, плотность и давление эффективной идеальной жидкости.

4. Киральная космологическая модель, соответствующая модифицированной теории гравитации вида $f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R)\nabla_\mu R\nabla^\mu R$, сведена к однополевой модели, теоретические предсказания которой для степенной и промежуточной (между степенной и экспоненциальной) эволюции масштабного фактора сопоставлены с наблюдательными данными.
5. Функционал действия $f(R, \square R)$ -, $f(R, (\nabla R)^2, \square R)$ -гравитации преобразован к киральной космологической модели в вакууме.
6. Найдены новые точные решения уравнений космологической динамики для киральной космологической модели, соответствующей $f(R, \square R)$ -, $f(R, (\nabla R)^2, \square R)$ -гравитации при нулевом и постоянном потенциалах скалярного поля; для киральной космологической модели, соответствующей $f(R, \square R)$ -гравитации в условиях режима медленного скатывания при заданной форме потенциала скалярного поля.

Теоретическая и практическая значимость

Разработанные методы, подходы к построению, исследованию и анализу теоретических предсказаний космологических моделей, их сопоставление с наблюдательными данными могут быть применены для изучения широкого класса моделей модифицированных теорий гравитации, описывающих космологическую инфляцию ранней Вселенной.

Полученные теоретические предсказания могут быть использованы для согласования по спектральным космологическим параметрам (спектр мощности тензорных и скалярных возмущений, спектральный индекс тензорных и скалярных возмущений, тензорно-скалярное отношение) с данными новых космических миссий, подобных Planck.

Положения, выносимые на защиту:

1. Инфляционные решения для экспоненциальной и квазиэкспоненциальной эволюции масштабного фактора в пространственно-плоской вселенной Фридмана в модифицированной теории гравитации вида $f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R)\nabla_\mu R\nabla^\mu R$.
2. Точные решения, описывающие степенную и промежуточную (между степенной и экспоненциальной) инфляцию, согласованные с наблюдательными данными космической обсерватории Planck по спектральным космологическим параметрам для двухкомпонентной киральной космологической модели, построенной для $f(R, (\nabla R)^2)$ -гравитации.

3. Космологические решения в условиях режима медленного скатывания, обеспечивающие раннюю космологическую инфляцию при постоянном потенциале скалярного поля в однополевой киральной космологической модели, редуцированной из киральной модели с тремя киральными полями при линейной зависимости двух полей от третьего, соответствующей $f(R, \square R)$ -, $f(R, (\nabla R)^2, \square R)$ -гравитации.
4. Космологические решения при экспоненциальной, тригонометрической и гиперболической эволюции масштабного фактора с постоянным потенциалом скалярных полей для киральной космологической модели с тремя киральными полями, соответствующей $f(R, \square R)$ -гравитации.

Степень достоверности и апробация результатов

Полученные результаты основаны на анализе решений уравнений модифицированных теорий гравитации, которые переходят в проверенные решения гравитационных уравнений Эйнштейна и моделей скалярно-тензорной теории гравитации.

Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на конференциях международного уровня: XII Международная конференция по гравитации, астрофизике и космологии (ICGAC-12) (Москва, 2015), 16-я Российская гравитационная конференция – Международная конференция по гравитации, космологии и астрофизике (RUSGRAV-16) (Калининград, 2017), Третий симпозиум Ассоциации БРИКС по гравитации, астрофизике и космологии (Казань, 2019), XXIII Международная научная конференция «Физические интерпретации теории относительности» (PIRT-2023) (Москва, 2023); школах-семинарах: 5-ая Ульяновская международная школа-семинар «Проблемы теоретической и наблюдательной космологии» UISS-2016 (Ульяновск, 2016), Международная зимняя школа-семинар по гравитации, космологии и астрофизике «Петровские чтения» (Казань, 2017, 2018, 2022); семинарах лаборатории гравитации, космологии, астрофизики Ульяновского государственного педагогического университета им. И. Н. Ульянова.

Список работ, опубликованных автором по теме диссертации

По теме диссертации опубликовано 15 работ, в том числе 7 статей и 8 тезисов докладов.

Публикации материалов диссертации в изданиях, рекомендованных ВАК

1. Червон, С. В. К выводу уравнений гравитационного поля в $f(R)$ гравитации с кинетическим скаляром кривизны / С. В. Червон, А. В. Николаев, Т. И. Майорова // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2017. – № 1. – С. 30–37.
2. Chervon, S. V. Chiral cosmological model of $f(R, \square R)$ gravity / S. V. Chervon, I. V. Fomin, T. I. Mayorova // Space, Time and Fundamental Interactions. – 2023. – № 1. – P. 117–120.
3. Chervon, S. V. Investigation of the Chiral Cosmological Model of $f(R, \square R)$ gravity / S. V. Chervon, I. V. Fomin, T. I. Chaadaeva // Space, Time and Fundamental Interactions. – 2023. – № 2. – P. 54–67.
4. Chaadaeva, T. I. Cosmological solutions of a chiral self-gravitating model of $f(R, (\nabla R)^2, \square R)$ gravity / T. I. Chaadaeva, S. V. Chervon // Space, Time and Fundamental Interactions. – 2024. – № 2. – P. 4–17.

Научные статьи, опубликованные в зарубежных изданиях, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования Scopus и/или Web of Science

5. Chervon, S. V. Chiral Cosmological Model of $f(R)$ Gravity with a Kinetic Curvature Scalar / S. V. Chervon, I. V. Fomin, T. I. Mayorova // Gravitation and Cosmology. – 2019. – Vol. 25, iss. 3. – P. 205–212.
6. Chervon, S. V. Kinetic scalar curvature extended $f(R)$ gravity / S. V. Chervon, A. V. Nikolaev, T. I. Mayorova [et al.] // Nuclear Physics B. – 2018. – Vol. 936, iss. 10. – P. 597–614.
7. Chervon, S. V. Cosmological parameters of $f(R)$ gravity with kinetic scalar curvature / S. V. Chervon, I. V. Fomin, T. I. Mayorova, A. V. Khapaeva // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – Vol. 1557, iss. 1. – P. 012016 (10 pages).

Публикации в сборниках тезисов

1. Майорова, Т. И. Космология в $f(R)$ гравитации с кинетическим скаляром кривизны / Т. И. Майорова, А. В. Николаев, С. В. Червон // ICGAC-12 : тезисы XII Международной конференции по гравитации, астрофизике и космологии, посвященной столетию общей теории относительности Эйнштейна. – Москва : РУДН, 2015. – С. 72.

2. Майорова, Т. И. Примеры космологических решений в $f(R)$ гравитации с кинетическим скаляром кривизны / Т. И. Майорова, А. В. Николаев, С. В. Червон // 5-ая Ульяновская международная школа-семинар «Проблемы теоретической и наблюдательной космологии» : сборник тезисов докладов международной научной школы-семинара / под общ. ред. С. В. Червона. – Ульяновск : ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова», 2016. – С. 41–42.

3. Mayorova, T. I. Gravitation with generalized Starobinsky-Podolsky action / T. I. Mayorova, A. V. Nikolaev, S. V. Chervon // XVI Всероссийская гравитационная конференция «Международная конференция по гравитации, космологии и астрофизике» (RUSGRAV-16) : материалы конференции / под общ. ред. А. В. Юрова – Калининград : Изд-во БФУ им. И. Канта, 2017. – С. 43–44.

4. Майорова, Т. И. Особенности модели $f(R)$ гравитации с кинетическим скаляром кривизны / Т. И. Майорова, А. В. Николаев, С. В. Червон // 3-я Международная зимняя школа-семинар по гравитации, космологии и астрофизике «Петровские чтения-2017» : программа и тезисы докладов международной научной школы-семинара. – Казань : Изд-во Академии наук РТ, 2017. – С. 50–51.

5. Червон, С. В. Космологические решения $f(R)$ гравитации с высшими производными / С. В. Червон, И. В. Фомин, Т. И. Майорова // 4-я Международная зимняя школа-семинар по гравитации, космологии и астрофизике «Петровские чтения-2018» : программа и тезисы докладов международной научной школы-семинара. – Казань : Изд-во КФУ, 2018. – С. 60–61.

6. Chervon, S. V. Cosmological parameters for $F(R, (\nabla R)^2)$ theory of gravity / S. V. Chervon, I. V. Fomin, T. I. Mayorova, A. V. Khapaeva // Physical Interpretation of Relativity Theory : International Scientific Conference (Moscow, 1-5 July, 2019): abstracts / Bauman Moscow State Technical University. – Moscow : BMSTU, 2019. – P. 31–32.

7. Nikolaev, A. V. Kinetic scalar curvature extended $f(R)$ gravity / A. V. Nikolaev, S. V. Chervon, T. I. Mayorova // Physical Interpretation of Relativity Theory: International Scientific Conference (Moscow, 1-5 July, 2019): Abstracts / Bauman Moscow State Technical University. – Moscow : BMSTU, 2019. – P. 88–89.

8. Червон, С. В. Исследование киральной космологической модели $f(R, \square R)$ -гравитации / С. В. Червон, И. В. Фомин, Т. И. Чаадаева // Физические интерпретации теории относительности (PIRT-2023) : сборник тезисов / Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени

Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)». – Москва : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2023. – С. 30–31.

Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и 2 приложений. Объём диссертации составляет 133 страницы, включая 2 рисунка. Список литературы включает 133 наименования.

Первая глава диссертационной работы содержит обзор МТГ высшего порядка. Рассмотрены способы построения скалярно-тензорных эквивалентов для моделей $f(R)$ -гравитации высшего порядка, а также представлен обзор литературы по киральным космологическим моделям (ККМ).

Во второй главе исследована МТГ вида $f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R)\nabla_\mu R \nabla^\mu R$. На основе вариации действия по метрике $g_{\mu\nu}$ подробно выведены уравнения гравитационного поля. Показано, что в частном случае $X(R) = 0$ полученные уравнения переходят в уравнения $f(R)$ -гравитации. Далее уравнения записаны для однородной и изотропной Вселенной с метрикой Фридмана–Робертсона–Уокера (ФРУ) в вакууме и в присутствии тёмной космической жидкости. Найдены точные решения космологических уравнений, описывающие экспоненциальную и квазиэкспоненциальную эволюцию масштабного фактора. Для рассматриваемой модели построен скалярно-тензорный эквивалент с двумя скалярными полями, обобщающий действие модели Старобинского–Подольского.

Третья глава посвящена поиску решений уравнений космологической динамики в рамках ККМ, соответствующей МТГ вида $f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R)\nabla_\mu R \nabla^\mu R$. Получены решения для случаев степенной и экспоненциальной эволюции масштабного фактора. С целью сопоставления теоретических предсказаний модели с наблюдательными данными двухкомпонентная ККМ была сведена к эффективной однополевой модели. Вычисленные спектральные космологические параметры (спектральный индекс скалярных возмущений, тензорно-скалярное отношение) сопоставлены с данными космической обсерватории Planck 2018 года.

В четвёртой главе исследована ККМ, ассоциированная с $f(R, \square R)$ -гравитацией. В условиях режима медленного скатывания найдены новые точные решения для постоянного и нулевого потенциалов скалярного поля. Путём редукции трёхполевой киральной модели к однополевой получены точные решения для указанных типов потенциала.

В пятой главе для ККМ с тремя киральными полями, соответствующей $f(R, (\nabla R)^2, \square R)$ -гравитации, записаны уравнения динамики полей и космологические уравнения. При нулевом потенциале найдены решения, в которых одно из киральных полей обращается в ноль, а два других логарифмически зависят от времени. При дополнительном условии $h_{22} = 0$ получены функциональные зависимости для киральных полей, содержащие произвольную функцию времени $Q(t)$. Выбором конкретного вида $Q(t)$ (степенная зависимость, константа) генерируются соответствующие решения. Для случая постоянного потенциала найдены решения, описывающие экспоненциальную, а также гиперболическую и тригонометрическую эволюцию масштабного фактора. Получены решения для киральных полей, выраженные через интегралы от функций времени, включающие $Q(t)$ и масштабный фактор; в качестве примеров рассмотрены случаи гиперболического синуса и косинуса для масштабного фактора.

В заключении перечислены основные оригинальные результаты диссертационной работы, выражены благодарности коллегам и научному руководителю, а также указаны проекты, при финансовой поддержке которых выполнялось исследование.

Глава 1. Краткий обзор модифицированных теорий гравитации высшего порядка

Открытие в конце XX века ускорения в расширении Вселенной (по наблюдениям сверхновых типа Ia) послужило мотивом для пересмотра эйнштейновской гравитации и обращения к расширенным (модифицированным) теориям гравитации. Согласно современным представлениям, позднее ускорение Вселенной вызвано особой формой материи с отрицательным давлением, получившей название «тёмная энергия». Для объяснения её природы используются два основных подхода. Первый предполагает введение в рамках эйнштейновской гравитации экзотических материальных компонент — таких как квинтэссенция, фантомная энергия или тахионы. Второй подход связан с модификацией самого гравитационного действия, что позволяет описать ускоренное расширение за счёт обычных материальных полей (идеальной жидкости, скалярных или электромагнитных полей). К числу таких модифицированных теорий гравитации относятся $f(R)$ -гравитация, скалярно-тензорные теории, гравитация Эйнштейна–Гаусса–Бонне и телепараллельный эквивалент общей теории относительности. Важно отметить, что помимо объяснения современного ускорения, МТГ должны также воспроизводить предсказания ранней космологической инфляции, которые могут быть проверены по наблюдательным данным.

В Главе 1 рассматриваются МТГ высшего порядка, то есть теории, уравнения движения которых содержат производные от метрики выше второго порядка. Обсуждаются методы понижения порядка этих уравнений. В частности, скалярно-тензорное представление позволяет свести анализ одного уравнения высокого порядка к системе уравнений с производными не выше второго, что существенно упрощает исследование [32].

В работе [33] показано, что для $f(R, \nabla_\mu R, \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} R, \dots, \nabla_{\mu_1} \dots \nabla_{\mu_n} R)$ -гравитации возможно построение скалярно-тензорного эквивалента, а также установлены достаточные условия для такой редукции. В статье [31] предложен способ построения скалярно-тензорного представления для МТГ вида $f(R, (\nabla R)^2, \square R)$ с двумя скалярными полями. Отметим, что данная модель включает член $(\nabla R)^2 = g^{\mu\nu} \nabla_\mu R \nabla_\nu R$, который отсутствует в теориях типа $f(R, \square R, \dots, \square^n R)$ [30].

В работе [34] исследуются теории гравитации высшего порядка вида $f(R, \square R, T)$. Известна также модель $f(R, T)$ -гравитации, в которой лагранжиан материи связан с геометрией через след тензора энергии-импульса $T = T^\mu_\mu$. Авторы обобщают эту модель, включая в неё производную $\square R$. Исходя из вариационного принципа, получены уравнения движения и проанализирована космология ФРУ. Показано, что для общего вида функции $f(R, \square R, T)$ решение де Ситтера неустойчиво. Исследован инфляционный сценарий, в рамках которого обеспечивается плавный выход из стадии инфляции.

1.1 $f(R)$ -гравитация высшего порядка

Рассматривается класс МТГ, который не требует присутствия экзотических компонент (тёмной энергии и тёмной материи). В МТГ данного класса гравитационное действие Эйнштейна–Гильберта модифицируется заменой скалярной кривизны R произвольной функцией $f(R)$, что впервые сделано Х. Бухдалем в 1970 г. [35]. Такой вид МТГ называют $f(R)$ -гравитацией [36]. При $f(R) = R$ модифицированное гравитационное действие преобразуется к гравитационному действию Эйнштейна–Гильберта. Модели этого типа были исследованы в литературе [37–43].

Преимущество $f(R)$ -гравитации заключается в её способности описывать как современное ускоренное расширение Вселенной, так и инфляционную стадию на ранних этапах её эволюции. В 1980 году А. Старобинский [8] предложил модель $f(R) = R + R^2/(6M^2)$, где квадратичное слагаемое R^2 обеспечивает инфляционную стадию. Теоретические предсказания этой модели хорошо согласуются с данными наблюдений космического микроволнового фона, полученными спутником Planck в 2018 году. Для объяснения современного ускоренного расширения, открытого в 1998 году, $f(R)$ -гравитация также успешно применяется [44, 45]. Если функция $f(R)$ является полиномом степени n (содержит слагаемые R^k , $k = 0, \dots, n$), то соответствующая теория относится к теориям четвёртого порядка, поскольку её уравнения поля включают производные метрики не выше четвёртого порядка.

Другим направлением обобщения являются теории, в которых функция f зависит не только от скалярной кривизны R , но и от её инвариантов, например,

$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ и $R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}$ [46–48]. Особый интерес представляют теории с включением слагаемого Гаусса–Бонне $G = R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2$ (см., например, [49–52]), который возникает в низкоэнергетическом пределе теории гетеротических струн и используется при построении моделей квантовой гравитации [53, 54]. Вклад скаляра Гаусса–Бонне становится существенным в динамике пространств размерности пять и выше [56, 57]. На его основе разработаны модели тёмной энергии, объясняющие современное ускорение Вселенной [49, 58].

Помимо $f(R)$ -гравитации, для описания инфляции и современного ускорения Вселенной, исследуются её обобщения, включающие производные скалярной кривизны R . В работе С. Готтлёбера с соавторами [30] модель А. Старобинского обобщена добавлением слагаемого вида $R\Box R$: $f(R, R\Box R) = R + \alpha R^2 + \beta R\Box R$, где α, β – произвольные постоянные, \Box – оператор Даламбера. В моделях $f(R, R\Box R)$ -гравитации реализуется сценарий инфляции в ранней Вселенной. $f(R, R\Box R)$ -гравитация подробно анализировались в ряде работ [30, 59–63].

В работе [64] методы динамических систем были применены к анализу космологической динамики $f(R; \Box R)$ -гравитации. Отмечено, что теории $f(R; \Box R)$ входят в более общий класс $f(R; \Box^n R)$, где порядок уравнений поля равен $2n+4$. Авторы исследуют конкретные примеры теорий шестого и восьмого порядка, что позволяет выявить роль высших производных в эволюции однородных изотропных моделей. Показано, что нелинейное взаимодействие слагаемых различного порядка приводит к сложному асимптотическому поведению, которое не может быть описано как малое возмущение моделей более низкого порядка.

Согласно [30, 65], в теориях гравитации шестого порядка отсутствует двойная инфляционная фаза. Этот вывод, по-видимому, можно распространить и на теории восьмого порядка, и нет оснований ожидать изменения поведения при переходе к ещё более высоким порядкам. Это позволяет предположить, что теории типа $f(R, \Box^n R)$ не способны генерировать множественные инфляционные фазы, несмотря на наличие нескольких скалярных полей в эквивалентном представлении.

Известно, что $f(R)$ -гравитация может быть эквивалентно представлена как гравитация со скалярным полем. Это позволяет исследовать влияние скалярного поля на динамику Вселенной. Такие модели, описывающие ускоренное расширение как на ранней, так и на поздней стадиях, хорошо согласуются с наблюдательными данными.

Для МТГ вида $f(R, R \square R)$ существует эквивалентное представление в виде гравитации с двумя скалярными полями. В работе [30] такой переход выполняется с помощью конформного преобразования $\tilde{g}_{\mu\nu} = (1 + 2\alpha R + 2\beta \square R)g_{\mu\nu}$ и введения скалярных полей $\psi = \ln(1 + 2\alpha R + 2\beta \square R)$ и $\phi = R$. В результате уравнения поля содержат два скалярных поля в качестве источника. Для общего случая $f(R, \square R, \dots, \square^n R)$ -гравитации показано, что уравнения поля имеют порядок $2+2n$ и эквивалентны теории с n скалярными полями. Исследованы инфляционные решения, описывающие, в частности, сценарий двойной инфляции: на первом этапе доминирует член $R \square R$, на втором – R^2 . Такой подход дополняет стандартные сценарии инфляционного расширения Вселенной и вносит вклад в теорию формирования крупномасштабной структуры.

Полученные результаты позволяют описывать сложные космологические сценарии инфляции в рамках теорий гравитации высших порядков. Модели гравитации высших порядков предоставляют мощный математический аппарат для описания различных этапов эволюции Вселенной, сохраняют устойчивость плоского пространства и вводят новые скалярные степени свободы, допускающие физическую интерпретацию и применимые в космологических исследованиях.

В работе [66] представлен вывод уравнений поля для гравитации высшего порядка, включающих слагаемые $\square^i R$, $\square^i R_{\mu\nu}$, $\square^i R_{\mu\nu\rho\sigma}$. Отмечено, что $f(g^{\mu\nu}, R_{\mu\nu\rho\sigma}, \square R_{\mu\nu\rho\sigma}, \dots, \square^i R_{\mu\nu\rho\sigma})$ -гравитация обобщает как $f(R, \square R, \dots, \square^i R)$ -гравитацию, так и $f(g^{\mu\nu}, R_{\mu\nu}, \square R_{\mu\nu}, \dots, \square^i R_{\mu\nu})$ -гравитацию.

В работе Г. Иванова [67] исследуются уравнения МТГ в римановом пространстве-времени с источником в виде тензора энергии-импульса. В зависимости от выбора параметра (классической постоянной Эйнштейна или постоянной, связанной с постоянной Планка) получаются либо уравнения второго порядка, аналогичные классическим, либо модифицированные уравнения четвертого порядка, содержащие операторы высших производных.

В случае пространственно-плоской метрики Фридмана масштабный фактор удовлетворяет модифицированному уравнению, учитывающему эти поправки. В частности, существуют несингулярные решения, в которых масштабный фактор имеет минимум или максимум, причём вблизи экстремума его поведение приближённо описывается квадратичной функцией времени. Кроме того, найдены точные решения, в том числе сингулярное степенное решение и нетривиальные вакуумные решения экспоненциального типа, ассоциированные

с пространством де Ситтера. Эти модифицированные уравнения расширяют классическую теорию гравитации Эйнштейна, позволяя получать несингулярные космологические модели.

Включение высших производных в уравнения гравитации расширяет возможности описания природы гравитации и структуры пространства-времени, однако проблема существования точных регулярных решений остаётся открытой и требует дополнительного изучения [67].

1.2 Построение эйнштейновской теории гравитации со скалярными полями для $f(R, (\nabla R)^2, \square R)$ -гравитации

В работе [31] рассмотрен способ построения скалярно-тензорного эквивалента с двумя скалярными полями для $f(R, (\nabla R)^2, \square R)$ -гравитации, где R – скалярная кривизна, а производные от R определены следующим образом $(\nabla R)^2 = \nabla_\mu R \nabla^\mu R$, $\square R = \nabla_\mu \nabla^\mu R$. Следуя методу, изложенному в работе [31], действие

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[f \left(R, (\nabla R)^2, \square R \right) \right], \quad (1.1)$$

путём введения множителей Лагранжа $\tilde{\lambda}, \tilde{\Lambda}_1, \tilde{\Lambda}_2$ с соответствующими дополнительными независимыми скалярными полями ϕ, χ, ψ преобразуется к действию в картине Эйнштейна с несколькими скалярными полями:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[f(\phi, \chi, \psi) - \tilde{\lambda}(\phi - R) - \tilde{\Lambda}_1(\chi - (\nabla R)^2) - \tilde{\Lambda}_2(\psi - \square R) \right]. \quad (1.2)$$

Для того, чтобы выполнялись условия $\phi = R$, $\chi = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi$, $\psi = \square \phi$ авторы преобразуют множители Лагранжа от $(\tilde{\lambda}, \tilde{\Lambda}_1, \tilde{\Lambda}_2)$ к $(\lambda, \Lambda_1, \Lambda_2)$, используя соотношения

$$\lambda = \tilde{\lambda} - \nabla^\mu \left[\tilde{\Lambda}_1 \nabla_\mu (\phi + R) \right] - \square \tilde{\Lambda}_2, \quad \Lambda_1 = \tilde{\Lambda}_1, \quad \Lambda_2 = \tilde{\Lambda}_2, \quad (1.3)$$

при которых действие записывается в виде

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[f(\phi, \chi, \psi) - \lambda(\phi - R) - \Lambda_1(\chi - (\nabla \phi)^2) - \Lambda_2(\psi - \square \phi) \right], \quad (1.4)$$

содержащее производные от скалярного поля ϕ . Варьирование действия (1.4) по полям χ и ψ приводит к уравнениям

$$\frac{df}{d\chi} = \Lambda_1, \quad \frac{df}{d\psi} = \Lambda_2, \quad (1.5)$$

варьирование по Λ_1, Λ_2 к уравнениям

$$\chi = (\nabla\phi)^2, \quad \psi = \square\phi, \quad (1.6)$$

в результате действие (1.4) принимает вид:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [f(\phi, (\nabla\phi)^2), \square\phi] - \lambda(\phi - R). \quad (1.7)$$

Таким образом, скалярная кривизна и производные от скалярной кривизны, входящие в функцию $f(R, (\nabla R)^2, \square R)$, заменены на скалярное поле ϕ и его производные.

Преобразование модели (1.7) из картины Йордана в картину Эйнштейна осуществляется посредством конформного преобразования метрики $g_{\mu\nu}^E = \Omega^2(x)g_{\mu\nu}^J$, $\Omega^2(x) = 2\lambda(x) > 0$, где индексы E и J обозначают соответственно картину Эйнштейна и картину Йордана. В результате скалярно-тензорный эквивалент для $f(R, (\nabla R)^2, \square R)$ -гравитации принимает вид:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}R - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2\lambda^2} g^{\mu\nu} \lambda_{,\mu} \lambda_{,\nu} \right) + \frac{1}{4\lambda^2} f(\phi, (\nabla\phi)^2, \square\phi) - \frac{\phi}{4\lambda} \right], \quad (1.8)$$

в котором индекс E , как и в дальнейшем, опускается.

1.3 Построение скалярно-мульти-тензорного эквивалента для $f(R)$ -гравитации высшего порядка

Скалярно-мульти-тензорная гравитация позволяет перейти от решения одного уравнения поля более высокого порядка к анализу большего числа уравнений поля с производными более низкого порядка [33]. Легче изучить каноническую структуру теории и её ограничения, когда определены вспомогательные поля и рассмотрен лагранжиан более низкого порядка [68, 69]. Процедура понижения порядка может облегчить изучение теории [32].

В работе [33] представлен способ построения скалярно-мульти-тензорного эквивалента для $f(R, \nabla_\mu R, \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} R, \dots, \nabla_{\mu_1 \dots \mu_n} R)$ -гравитации. Показано, что $f(R, \nabla R, \dots, \nabla^n R)$ -гравитация имеет эквивалент в скалярно-мульти-тензорном виде, который соответствует по структуре теориям Бранса–Дикке с кинетическими слагаемыми $\omega = 0$ и $\omega = -3/2$. Этот результат аналогичен $f(R)$ -гравитации. Построенные скалярно-мульти-тензорные эквиваленты отличаются от теорий Бранса–Дикке наличием множества тензоров, отсутствующих в последней. Кроме того, установлены достаточные условия для того, чтобы $f(R, \nabla R, \dots, \nabla^n R)$ -гравитация была записана как скалярно-мульти-тензорный эквивалент. Согласно [33] действие, содержащее функцию от скалярной кривизны и его производных до n -го порядка, записывается в виде:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [f(R, \nabla R, \nabla^2 R, \dots, \nabla^n R) + \mathcal{L}_M], \quad (1.9)$$

где \mathcal{L}_M – лагранжиан материи. Для построения скалярно-мульти-тензорного эквивалента в действие (1.9) вводятся новые скалярные поля, тензорные величины, а так же множители Лагранжа таким образом, что (1.9) преобразуется к виду:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[f(\xi, \xi_\mu, \dots, \xi_{\mu_1 \dots \mu_n}) - \frac{\partial f}{\partial \xi} (\xi - R) - \frac{\partial f}{\partial \xi_\mu} (\xi_\mu - \nabla_\mu R) - \right. \\ \left. - \frac{\partial f}{\partial \xi_{\mu\nu}} (\xi_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu R) - \dots - \frac{\partial f}{\partial \xi_{\mu_1 \dots \mu_n}} (\xi_{\mu_1 \dots \mu_n} - \nabla_{\mu_1} \dots \nabla_{\mu_n} R) + \mathcal{L}_M \right]. \quad (1.10)$$

При этом должны выполняться условия

$$\begin{cases} \xi - R = 0, \\ \xi_\mu - \nabla_\mu R = 0, \\ \xi_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu R = 0, \\ \dots, \\ \xi_{\mu_1 \dots \mu_n} - \nabla_{\mu_1} \dots \nabla_{\mu_n} R = 0, \end{cases} \quad (1.11)$$

где ξ – вспомогательное скалярное поле, $\xi_\mu, \xi_{\mu\nu}, \dots, \xi_{\mu_1 \dots \mu_n}$ – это величины, вводимые для преобразования исходного действия с функцией f , зависящей от скалярной кривизны R и её ковариантных производных, в теорию, эквивалентную скалярно-мульти-тензорной. Затем, определяя тензорные величины

$\phi^{(n)} = [\phi, \phi^\mu, \dots, \phi^{\mu_1 \dots \mu_n}]$ в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi \equiv \frac{\partial f}{\partial \xi}, \\ \phi^\mu \equiv \frac{\partial f}{\partial \xi_\mu}, \\ \phi^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial f}{\partial \xi_{\mu\nu}}, \\ \dots, \\ \phi^{\mu_1 \dots \mu_n} \equiv \frac{\partial f}{\partial \xi_{\mu_1 \dots \mu_n}}, \end{array} \right. \quad (1.12)$$

а также потенциал

$$U(\phi, \phi^\mu, \dots, \phi^{\mu_1 \dots \mu_n}) = \phi \xi + \phi^\mu \xi_\mu + \phi^{\mu\nu} \xi_{\mu\nu} + \dots + \phi^{\mu_1 \dots \mu_n} \xi_{\mu_1 \dots \mu_n} - f(\xi, \xi_\mu, \dots, \xi_{\mu_1 \dots \mu_n}), \quad (1.13)$$

при условии, что

$$\sqrt{-g} \phi^{\mu_1 \dots \mu_n} \nabla_{\mu_1} \dots \nabla_{\mu_n} R = \sqrt{-g} (-1)^n \nabla_{\mu_n} \dots \nabla_{\mu_1} R + \partial_\mu S_{(n)}^\mu, \quad (1.14)$$

где $\partial_\mu S_{(n)}^\mu$ – поверхностная компонента, записывается действие (1.10) в преобразованной форме:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [\Phi R - U(\phi, \phi_\mu, \dots, \phi_{\mu_1 \dots \mu_n}, \nabla_\mu \phi^\mu)], \quad (1.15)$$

которое является скалярно-мульти-тензорным эквивалентом для МТГ вида $f(R, \nabla_\mu R, \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} R, \dots, \nabla_{\mu_1} \dots \nabla_{\mu_n} R)$, где

$$\Phi \equiv \phi - \nabla_\mu \phi^\mu + \dots + (-1)^n \nabla_{\mu_n} \dots \nabla_{\mu_1}, \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} U &= U(\Phi, \phi_\mu, \dots, \phi_{\mu_1 \dots \mu_n}, \nabla_\mu \phi^\mu, \dots, \nabla_{\mu_n} \dots \nabla_{\mu_1} \phi^{\mu_1 \dots \mu_n}) = \\ &= (\Phi + \nabla_\mu \phi^\mu + \dots + (-1)^{n+1} \nabla_{\mu_n} \dots \nabla_{\mu_1} \phi^{\mu_1 \dots \mu_n}) \xi + \\ &+ \phi^\mu \xi_\mu + \phi^{\mu\nu} \xi_{\mu\nu} + \dots + \phi^{\mu_1 \dots \mu_n} \xi_{\mu_1 \dots \mu_n} - f(\xi, \xi_\mu, \xi_{\mu\nu}, \dots, \xi_{\mu_1 \dots \mu_n}). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Варьируя действие по независимым полям, записываются уравнения поля:

$$\Phi G_{\mu\nu} (\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \square \Phi) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} U - v_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.18)$$

$$R = \frac{\partial U}{\partial \Phi}, \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \phi^\rho} - \nabla^\mu \frac{\partial U}{\partial (\nabla_\mu \phi^\rho)} = 0, \quad (1.20)$$

...

$$\frac{\partial U}{\partial \phi^{\rho_1 \dots \rho_n}} + (-1)^n \nabla_{\mu_n} \dots \nabla_{\mu_1} \frac{\partial U}{\partial (\nabla_{\mu_n} \dots \nabla_{\mu_1} \phi^{\rho_1 \dots \rho_n})}, \quad (1.21)$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta \psi} = 0, \quad (1.22)$$

где $v_{\mu\nu} \equiv \frac{\delta U}{\delta g^{\mu\nu}}$; $T_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2\kappa} \left[g_{\mu\nu} \mathcal{L}_M(g, \psi) - 2 \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}} \right]$ – тензор энергии-импульса; ψ – поле материи. Теория гравитации Эйнштейна восстанавливается при $\Phi = 1$, $\phi^\rho = \phi^{\rho_1 \rho_2} = \dots = \phi^{\rho_1 \dots \rho_n} = 0$. Приведенная система уравнений представляет собой обобщение скалярно-тензорного эквивалента для $f(R)$ -гравитации на случай теории, зависящей от производных скалярной кривизны [70]. Несмотря на отсутствие явного кинетического слагаемого для поля Φ , его не минимальная связь с кривизной R приводит к динамическим уравнениям поля: если учесть след уравнения (1.18), то уравнение (1.19) можно переписать в виде:

$$3\Box\Phi + 2U - \Phi \frac{\partial U}{\partial \Phi} - g^{\mu\nu} v_{\mu\nu} = \kappa T, \quad (1.23)$$

что подтверждает наличие динамики для Φ при отсутствии кинетического слагаемого [70].

Данный подход нахождения скалярно-мульти-тензорного эквивалента был применен к следующим моделям $f(R)$ -гравитации высшего порядка:

$$f(R, \nabla_\mu R) = R + \frac{c_0}{2} R^2 + \frac{c_1}{2} \nabla_\mu R \nabla^\mu R, \quad (1.24)$$

$$f(R, \nabla_\mu R) = R + \frac{c_0}{2} R^2 + \frac{c_1}{2} \nabla_\mu R \nabla^\mu R + \dots + \frac{c_n}{2} \nabla_{\mu_1} \dots \nabla_{\mu_n} R \nabla^{\mu_1} \dots \nabla^{\mu_n} R, \quad (1.25)$$

где $c_0 \neq 0$, $c_1 \neq 0$, \dots , $c_n \neq 0$. При этих ограничениях теория, основанная на действии (1.24), не является сингулярной. Действие Старобинского–Подольского можно было бы сделать эквивалентным теории типа $f(R, \Box R)$ с точностью до поверхностной компоненты после интегрирования по частям; однако результирующая $f(R, \Box R)$ -гравитация была бы сингулярной.

Действие (1.24) может быть переписано, вплоть до поверхностных компонент, следующим образом:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[R + \frac{c_0}{2} R^2 - \frac{c_1}{2} \nabla_\mu R \Box R + \mathcal{L}_M \right]. \quad (1.26)$$

В работе [59] предложен подход, в котором показано, что теория гравитации вида $R + \gamma R \Box R$ динамически эквивалентна скалярно-тензорной теории Бранса–Дикке с двумя скалярными полями [71]: полем Φ (без кинетического

слагаемого, $\omega = 0$) и полем σ , связанным с R . При этом поле Φ выступает как конформно-связанный множитель перед скалярной кривизной R , а поле σ обладает стандартным кинетическим слагаемым и взаимодействует с Φ через потенциал. Остальные вспомогательные поля ϕ_i устраняются уравнениями связи, что в конечном счёте приводит к двум дополнительным динамическим переменным. Это согласуется с результатами, представленными в работе [33], где также устанавливается конформная эквивалентность расширенных теорий гравитации общей теории относительности со скалярными полями.

Результаты и выводы аналогичны тем, что приведены для модели (1.24), где потенциал имеет вид:

$$U = U(\Phi, \phi_\mu, \dots, \phi_{\mu_1 \dots \mu_n}, \nabla_\mu \phi^\mu, \dots, \nabla_{\mu_n} \dots \nabla_{\mu_1} \phi^{\mu_1 \dots \mu_n}) = \frac{1}{2c_0} (\Phi + \nabla_\mu \phi^\mu + \dots + (-1)^{n+1} \nabla_{\mu_1} \dots \nabla_{\mu_n} \phi^{\mu_n \dots \mu_1} - 1)^2 + \quad (1.27)$$

$$+ \frac{\phi^\mu \phi_\mu}{2c_1} + \dots + \frac{\phi^{\mu_1 \dots \mu_n} \phi_{\mu_1 \dots \mu_n}}{2c_n}. \quad (1.28)$$

При рассмотрении модели, содержащей вторую производную скалярной кривизны, было замечено, что слагаемое более высокого порядка $\nabla_\mu R \nabla^\mu R$ может быть записано как $R \square R$. Нельзя поступить аналогичным образом для обобщённого случая и получить действие только с $R \square^n R$ компонентами. Если рассматривать слагаемое $\nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} R \nabla^{\mu_1} \nabla^{\mu_2} R$, то можно проверить, что появляется тензор Риччи, т. е.

$$\nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} R \nabla^{\mu_1} \nabla^{\mu_2} R = R \square^2 R + R \nabla^{\mu_1} (R_{\mu_2 \mu_1} \nabla^{\mu_2} R) + \partial_\mu S_{(2)}^\mu. \quad (1.29)$$

Для моделей, содержащих производные более высокого порядка от скалярной кривизны, ситуация усложняется, поскольку появляются тензоры Римана. Таким образом, в обобщённом случае нет эквивалентности между теориями $f(R, \nabla R, \dots, \nabla^n R)$ и $f(R, \square R, \dots, \square^n R)$.

Кроме того, скалярно-мульти-тензорная теория, основанная на $f(R, \nabla R, \dots)$ -гравитация представляет собой не просто обобщение теории Бранса–Дикке, а динамически эквивалентную ей скалярно-мульти-тензорную модель с дополнительными степенями свободы, что подтверждается как на уровне уравнений движения, так и на уровне действия после конформного преобразования.

Следует подчеркнуть, что $f(R, \nabla R, \dots)$ -гравитации отличаются от $f(R, \square R, \dots)$ -гравитаций [59] слагаемыми, включающими тензоры Риччи

и Римана, как показано, например, в уравнении (1.29). Тем не менее, в частных случаях $f(R, \nabla R, \dots)$ -гравитация может быть сведена к $f(R, \square R, \dots)$ -гравитации путём соответствующего сокращения индексов, например, $f(R, \nabla^2 R) = g(R, g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu R)$.

Уравнения поля для $f(R)$ -, $f(R, \nabla R, \dots)$ -гравитации в форме Бранса–Дикке имеют одинаковую структуру при обобщении f' на функциональную производную. Несмотря на это сходство, почти все общие результаты теории $f(R)$ -гравитации должны быть повторно получены для конкретных применений, таких как космология и предел слабого поля. Исключение составляет космологическая теорема Элерса–Герена–Сакса [72].

Теорема Элерса–Герена–Сакса утверждает, что если все наблюдатели видят изотропное излучение (например, излучение космического микроволнового фона) во Вселенной, то пространство-время является изотропным и пространственно однородным и, следовательно, описывается метрикой ФРУ. Как показано в работах [73, 74], эта теорема справедлива для любой скалярно-тензорной теории, независимо от вида потенциала скалярного поля ϕ .

Для МТГ вида $f(R, \nabla R, \dots)$ описание Вселенной, заполненной изотропным реликтовым излучением, обязательно должно быть выполнено с использованием линейного элемента ФРУ. Этот факт был фактически использован в статье [33] как попытка описать динамику тёмной энергии с помощью теории, основанной на действии Эйнштейна–Гильберта–Подольского.

Следуя методологии, разработанной для $f(R)$ -гравитации [70], можно рассматривать общие особенности космологии $f(R, \nabla R, \dots)$ -гравитации, которые помогли описать раннее и современное ускоренное расширение Вселенной.

1.4 Скалярно-тензорные теории гравитации высших порядков

Скалярно-тензорные теории представляют собой специфический класс МТГ, в которых взаимодействие описывается комбинацией скалярного поля и метрического тензорного поля. Скалярно-тензорные теории гравитации высших порядков возникают при учете неминимальных взаимодействий и включении слагаемых высших порядков, что достигается за счет соответствующего выбора эффективного лагранжиана.

В четырёхмерном пространстве-времени действие для таких гравитационных теорий может быть записано в следующем виде:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[F(R, \square R, \square^2 R, \dots, \square^n R, \phi) - \frac{\epsilon}{2} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + 2\kappa \mathcal{L}^m \right], \quad (1.30)$$

где F – функция инвариантов скалярной кривизны R , её производных (в виде последовательных применений оператора Даламбера) и скалярного поля ϕ ; $\epsilon = \pm 1, 0$ – постоянная величина, определяющая природу и динамику скалярного поля, которое может быть обычным или фантомным [75–77]; $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ – гравитационная постоянная; \mathcal{L}^m – лагранжиан, определяющий вклад материи.

Уравнения поля выводятся варьированием действия по метрике $g_{\mu\nu}$ и принимают вид:

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu} = & \frac{1}{G} \left[\kappa T^{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (F - GR) + (g^{\mu\sigma} g^{\nu\xi} - g^{\mu\nu} g^{\sigma\xi}) G_{,\sigma\xi} + \right. \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\alpha} (g^{\mu\nu} g^{\sigma\xi} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\xi}) (\square^{\beta-\alpha})_{,\xi} \left(\square^{\alpha-\beta} \frac{\partial F}{\partial \square^{\alpha} R} \right)_{,\sigma} - \\ & \left. - g^{\mu\nu} g^{\sigma\xi} \left((\square^{\beta-1} R)_{,\xi} \square^{\alpha-\beta} \frac{\partial F}{\partial \square^{\alpha} R} \right)_{,\sigma} \right], \quad (1.31) \end{aligned}$$

где $G^{\mu\nu}$ – тензор Эйнштейна, а $G \equiv \sum_{\alpha=0}^N \square^{\alpha} \left(\frac{\partial F}{\partial \square^{\alpha} R} \right)$. Дифференциальные уравнения (1.31) имеют порядок $(2N + 4)$.

Тензор энергии-импульса, определяемый кинетической частью скалярного поля и материей, принимает вид:

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(m)} + \frac{\epsilon}{2} \left[\phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi_{,\sigma} \phi_{,\sigma} \right]. \quad (1.32)$$

Варьирование действия по скалярному полю ϕ приводит к уравнению:

$$\epsilon \square \phi = - \frac{\partial F}{\partial \phi}, \quad (1.33)$$

где F – функция, определяющая плотность лагранжиана.

Введение определенных приближений в полученные уравнения позволяет получать различные модели гравитации. Связь скалярно-тензорных теорий с теориями гравитации высших порядков может быть установлена с помощью

конформных преобразований, как показано в работах [78–81]. Простую модификацию общей теории относительности Эйнштейна можно получить, положив в действии:

$$F = f(R), \quad \epsilon = 0. \quad (1.34)$$

Чтобы получить стандартное действие Эйнштейна–Гильберта, достаточно установить $f(R) = R$. В $f(R)$ -гравитации вакуумные уравнения поля принимают вид:

$$-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + R_{\mu\nu}f'(R) + (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu)f'(R) = 0. \quad (1.35)$$

Влияние слагаемых высших порядков может быть интерпретировано как добавочный вклад в тензор энергии-импульса. Дополнительные компоненты высших порядков в гравитационном действии функционируют аналогично тензору энергии-импульса, связанному с функцией $f(R)$. При учёте материи в форме идеальной жидкости уравнение поля принимает вид:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \frac{1}{f'(R)} \left[\frac{1}{2}g_{\mu\nu} (f(R) - f'(R)R) + f'(R)_{;\mu\nu} - g_{\mu\nu}\square f'(R) \right] = \\ &= T_{\mu\nu}^{(eff)} + \frac{\kappa T_{\mu\nu}^{(m)}}{f'(R)}, \end{aligned} \quad (1.36)$$

где $T_{\mu\nu}^{(eff)}$ – эффективный тензор энергии-импульса, содержащий компоненты высших порядков по скалярной кривизне R . Полагая $T_{\mu\nu}^{(eff)} = 0$, модель переходит в теорию $f(R)$ -гравитации.

Следующий этап упрощения опирается на предположение, что

$$F = F(\phi)R - V(\phi), \quad \epsilon = -1, \quad (1.37)$$

которое приводит к действию вида:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[F(\phi)R + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - V(\phi) \right], \quad (1.38)$$

где $V(\phi)$, $F(\phi)$ – функции потенциала и связи скалярного поля ϕ с кривизной. При $V(\phi) = 0$ действие (1.38) соответствует действию теории Бранса–Дикке.

Варьируя по $g_{\mu\nu}$, получаем уравнение поля второго порядка:

$$F(\phi)G_{\mu\nu} = F(\phi) \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right] =$$

$$= -\frac{1}{2}T_{\mu\nu}^\phi - g_{\mu\nu}\square F(\phi) + F(\phi)_{,\mu\nu}, \quad (1.39)$$

где \square – оператор Даламбера. Тензор энергии-импульса скалярного поля принимает вид:

$$T_{\mu\nu}^\phi = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\sigma}\phi^{,\sigma} + g_{\mu\nu}V(\phi). \quad (1.40)$$

Варьируя по скалярному полю ϕ , получаем уравнение движения для скалярного поля:

$$\begin{aligned} \square\phi - RF_\phi(\phi) + V_\phi(\phi) &= 0, \\ F_\phi(\phi) &= \frac{dF(\phi)}{d\phi}, \quad V_\phi(\phi) = \frac{dV(\phi)}{d\phi}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Аналогичным образом осуществляются выводы для модели идеальной жидкости.

1.5 Киральные космологические модели

Самогравитирующая нелинейная сигма-модель с потенциалом взаимодействия описывается интегралом действия следующего вида

$$S_{CSGM} = \int \sqrt{-g}d^4x \left(\frac{R}{2\kappa} - \frac{1}{2}h_{AB}(\varphi)\varphi_{,\mu}^A\varphi_{,\nu}^B g^{\mu\nu} - W(\varphi) \right), \quad (1.42)$$

где $g_{\mu\nu}(x)$ – метрика пространства-времени, с сигнатурой $(+ - - -)$, $g = |\det(g_{ik})|$ – определитель метрики, $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ – скалярная кривизна пространства-времени, $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ – гравитационная постоянная Эйнштейна, $h_{AB} = h_{AB}(\varphi)$ – метрика пространства целей (кирального пространства), зависящая от скалярных полей φ , $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^N)$ – киральные поля, $\varphi_{,\mu}^A = \partial_\mu\varphi^A = \frac{\partial\varphi^A}{\partial x^\mu}$, $W(\varphi)$ – потенциал скалярного поля φ (потенциал взаимодействия).

Общие уравнения киральной космологической модели (ККМ) приведены ниже [82]:

- тензор энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = h_{AB}\varphi_{,\mu}^A\varphi_{,\nu}^B - g_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}\varphi_{,\alpha}^A\varphi_{,\beta}^B g^{\alpha\beta}h_{AB} + W(\varphi)\right]; \quad (1.43)$$

- уравнение Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} = \kappa \{ h_{AB} \varphi_{,\mu}^A \varphi_{,\nu}^B + g_{\mu\nu} W(\varphi) \}; \quad (1.44)$$

- динамические уравнения киральных полей

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} h_{AB} g^{\mu\nu} \varphi_{,\nu}^A) - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{BC}}{\partial \varphi^A} \varphi_{,\mu}^C \varphi_{,\nu}^B g^{\mu\nu} - W_{,A} = 0; \quad (1.45)$$

- диагональная двухкомпонентная киральная метрика

$$ds^2 = h_{11} d\chi^2 + h_{22}(\chi, \phi) d\phi^2, \quad h_{11} = \text{const}; \quad (1.46)$$

- уравнения киральных полей для двухкомпонентного случая

$$h_{11} \ddot{\chi} + 3h_{11} H \dot{\chi} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{22}(\chi, \phi)}{\partial \chi} \dot{\phi}^2 + \frac{\partial W(\chi, \phi)}{\partial \chi} = 0; \quad (1.47)$$

$$3h_{22}(\chi, \phi) H \dot{\phi} + \frac{d}{dt} (h_{22} \dot{\phi}) - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{22}(\chi, \phi)}{\partial \phi} \dot{\phi}^2 + \frac{\partial W(\chi, \phi)}{\partial \phi} = 0. \quad (1.48)$$

Такие модели, рассматриваемые в космологии, получили название киральные космологические модели. В более общем случае, для произвольных пространств-времен (например, сферически-симметричного [82, 83]), модель (1.42) называют киральной само-гравитирующей моделью (КСГМ). Таким образом, ККМ представляет собой частный случай КСГМ, ограниченный космологическими пространствами.

Конкретная ККМ определяется выбором размерности киральной метрики, видом самой метрики h_{AB} и потенциалом взаимодействия $W(\varphi)$. Основные исследования таких моделей проводились для космологии, описывающей однородную и изотропную Вселенную с метрикой ФРУ, в работах [13, 84, 85].

Хорошо известно, что в ядерной физике термин «киральная модель» был введён для $SU(2)_L \times SU(2)_R$ – симметричной модели пионного поля $\pi^i(x)$. С другой стороны, термин «нелинейная сигма модель» использовался в работе [86], где также рассматривалась киральная симметрия.

В обзоре [87] были представлены геометрические аспекты ККМ (в основном двухмерных) и введён в рассмотрение термин «киральные модели общего вида» для n -мерного нелинейного многообразия с римановой метрикой.

В таких моделях лагранжиан остаётся идентичным случаю для свободных полей. Однако, в отличие от классического случая, ограничения накладываются

на сами поля, что приводит к тому, что поля φ^A принимают значения в рамках определённого нелинейного многообразия M . Это положение подчёркивает важность геометрической структуры многообразия при формулировке динамики полей и, следовательно, требует особого внимания к условиям, которым они подчиняются в контексте вариационного принципа.

Включение гравитационного поля в киральные модели связано с поиском инстантонных и меронных решений в четырехмерных римановых пространствах евклидовой сигнатуры. Такие решения впервые были найдены в работе де Альфаро с соавторами [88]. Г. Иванов в работе [89], независимо от работы [88], ввёл в рассмотрение «нелинейную сигма модель, взаимодействующую с гравитацией», в которой скалярные (киральные) поля рассматривались как источники гравитации в пространствах-временах лоренцевой сигнатуры. Кроме того, кинетическое взаимодействие между полями вводилось через метрику кирального пространства (или пространства целей). Такие модели были названы «само-гравитирующие сигма-модели» (СГСМ). Отметим, что аналоги инстантонных и меронных решений для СГСМ и их обобщения инвариантно-групповыми методами были найдены в работе [90].

Потенциальное взаимодействие киральных полей было введено С. Червоном в 1994 году [84]. В этой работе такие, обобщенные на потенциальную энергию взаимодействия, модели были названы «само-гравитирующие модели с потенциалом». Затем в последующих публикациях: [13, 85], [91] и др., используя терминологию А. Переломова [87], такие модели стали называться «киральными инфляционными моделями» или, в более общем рассмотрении, – «киральными космологическими моделями».

Следует отметить, что термин «киральная космологическая модель» отражает геометрическое взаимодействие полей за счёт метрики кирального пространства, которое включает кинетическое взаимодействие полей.

Таким образом, можно сказать, что термин «киральная космологическая модель» введён как краткий эквивалент для «само-гравитирующей нелинейной сигма модели с потенциалом взаимодействия», используемый в космологии [84], [91].

Для космологических приложений рассматривают двухкомпонентную ККМ, имеющую больше преимуществ перед однополевой моделью. Двухполевая модель лучше согласуется с наблюдательными данными. Ряд двухполевых

моделей представлен в [91]. В монографии [13] уделяется внимание космологии ранней вселенной, описываемой ККМ с фантомными полями.

Согласно [92, 93] исследовалась модель двух скалярных полей скалярно-тензорного представления. В [94] исследовалась ККМ с двумя скалярными полями и космологической постоянной.

В работе [95] исследуется асимптотическая динамика для уравнений поля в двухскалярной теории поля в однородном и анизотропном фоновом пространстве, где кинетическая энергия двух скалярных полей лежит на двумерном максимально симметричном пространстве отрицательной кривизны, гиперболическом пространстве. Приложения этой модели в других областях космической эволюции описаны в [96–99].

Последние работы [100, 101] посвящены изучению двухполевой модели в рамках фантомной инфляции. Метод получения точных решений для экспоненциальных потенциалов в фантомных двухполевых моделях описан в работе [102]

Согласно [103, 104] рассматривается кирально-фантомная модель, состоящая из двух скалярных полей со смешанным кинетическим слагаемым, при этом одно скалярное поле имеет отрицательную кинетическую энергию, то есть обладает фантомными свойствами.

В работах [103, 104] вместо понятие «киральная космологическая модель» используется термин «киральная космология».

1.6 Выводы к Главе 1

В Главе 1 представлен обзор некоторых МТГ и рассмотрены методы исследования моделей, применяемые в рамках данной работы.

Проведённый обзор МТГ высшего порядка демонстрирует, что включение в гравитационное действие производных скалярной кривизны – как первых $(\nabla R)^2$, так и вторых $\square R$ – является естественным обобщением $f(R)$ -гравитации, обоснованным как квантовой теорией гравитации, так и необходимостью космологического моделирования. Показано, что теории вида $f(R, (\nabla R)^2)$, $f(R, \square R)$ и $f(R, (\nabla R)^2, \square R)$ обладают отличиями от $f(R)$ -гравитации, а анализ уравнений космологической динамики затруднён

из-за наличия производных от метрики шестого и более высоких порядков. Ключевым инструментом преодоления этой сложности является построение скалярно-тензорных и скалярно-мульти-тензорных эквивалентов, позволяющих свести исходные модели к теориям гравитации Эйнштейна с несколькими взаимодействующими скалярными полями. Особое место среди таких представлений занимают ККМ, в которых кинетическое взаимодействие полей задаётся метрикой пространства целей.

Несмотря на наличие общих схем построения скалярно-тензорных эквивалентов, систематическое исследование космологической динамики для указанных классов модифицированной гравитации в рамках ККМ до настоящего времени не проводилось.

Впервые для $f(R, (\nabla R)^2, \square R)$ -гравитации и её усечённых версий будет проведено систематическое построение ККМ, получены новые классы точных решений, а также предложен оригинальный метод редукции многополевых моделей к однополевой, обеспечивающий возможность сопоставления теоретических предсказаний по спектральному индексу n_s и тензорно-скалярному отношению r .

Глава 2. Космологическая динамика на основе $f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R) \nabla_\mu R \nabla^\mu R$ -гравитации

В Главе 2 выводятся уравнения гравитационного поля $f_1(R) + X(R) \nabla_\mu R \nabla^\mu R$ -гравитации, где $f_1(R)$, $X(R)$ – произвольные функции от скалярной кривизны, основываясь на метрическом формализме и методе Гиббонса–Йорка–Хоукинга для устранения граничного интеграла [43]. Нахождение уравнений в метрическом формализме основано на вариационном принципе [105]. Подробный способ получения уравнений в метрическом формализме, выделение 4-дивергенции и граничных компонент для $f(R)$ в общем виде указан в работе [106].

Для рассмотрения космологических аспектов модели в разделах 2.2 и 2.3 записываются уравнения в пространственно-плоской метрике ФРУ для космической жидкости. Показано, как уравнения рассматриваемой модели переходят в уравнения для $f(R)$ -гравитации при выборе произвольной функции $f(R)$.

Скалярно-мульти-тензорное представление указанной модели гравитации, выполненное по методу [33], обобщает модель Старобинского–Подольского высшего порядка.

2.1 Уравнения гравитационного поля для $f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R) \nabla_\mu R \nabla^\mu R$ -гравитации

Действие модели $f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R) \nabla_\mu R \nabla^\mu R$ -гравитации, включающее слагаемое S_M , которое отвечает за вклад материи, записывается в виде:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (f_1(R) + X(R) \nabla_\mu R \nabla^\mu R) + S_M. \quad (2.1)$$

Данная модель обобщает $f(R)$ -гравитацию наличием слагаемого с первыми производными от скалярной кривизны R . Гравитационная часть действия включает две компоненты: 1) произвольную функцию $f_1(R)$ от скалярной кривизны R , которая аналогична $f(R)$ -гравитации; 2) $X(R) \nabla_\mu R \nabla^\mu R$ – произвольную функцию от скалярной кривизны $X(R)$ домноженную на квадрат первой

производной скалярной кривизны. Наличие второй компоненты приводит к появлению дополнительных слагаемых, которые отсутствуют $f(R)$ -гравитации.

Вариация действия (2.1)

$$\begin{aligned} \delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R_{,\alpha} R^{,\alpha} X(R) + f_1(R)) + \right. \\ \left. + X'(R) R_{\mu\nu} R_{,\alpha} R^{,\alpha} + f_1'(R) R_{\mu\nu} \right] + I + \delta S, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} I = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\left(R_{,\alpha} R^{,\alpha} X' + f_1' \right) (g_{\mu\nu} \square \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu}) + \right. \\ \left. + 2X g^{\alpha\beta} R_\alpha \nabla_\beta (R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu}) \right], \end{aligned} \quad (2.3)$$

содержит три группы слагаемых: от вариации элемента $\sqrt{-g}$; от вариации скалярной кривизны R и его функции $f_1(R)$; от вариации произвольной функции $X(R)$ и производной скалярной кривизны $\nabla_\mu R$. Для краткости записи в (2.2) и (2.3) использованы следующие обозначения: $\nabla_\mu R = R_{,\mu}$, а аргументы функций $f_1(R)$ и $X(R)$ опущены. Добавка I (2.3) к вариации исходного действия содержит слагаемые, каждый из которых содержит вариацию от метрического тензора под знаком дифференцирования. Для применения условий метрического формализма, необходимо вынести $\delta g_{\mu\nu}$ из-под знаков дифференцирования. Данная операция выполняется преобразованием интеграла так, что исходный интеграл сводится к 4-дивергенции от некоторого выражения A_μ и интеграла, содержащего $\delta g_{\mu\nu}$. Применяя теорему Гаусса–Стокса к интегралам 4-дивергенции и преобразовывая их к интегралам по гиперповерхности, вводится граничная компонента Гиббонса–Йорка–Хоукинга, позволяющий занулить интегралы 4-дивергенции, при условии $\delta R = 0$. Интегралы, содержащие $\delta g_{\mu\nu}$, учитываются в уравнениях гравитационного поля.

Поиск некоторого выражения вида A_μ , для каждого из интегралов в (2.3) производится отдельно. Первый интеграл, который подвергается модификации, записывается следующим образом:

$$\int d^4x \sqrt{-g} \left(R_{,\alpha} R^{,\alpha} X' + f_1' \right) g_{\mu\nu} \square \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

Выбирается $M_\beta = (R_{,\alpha} R^{,\alpha} X' + f_1') g_{\mu\nu} \nabla_\beta \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\beta (R_{,\alpha} R^{,\alpha} X' + f_1') g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$ таким образом, что при действии ковариантной производной на это выражение получается исходное слагаемое и некоторое добавочное слагаемое, в котором

$\delta g_{\mu\nu}$ свободно от дифференцирования. Так, первый интеграл преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int d^4x \sqrt{-g} \left(R_{,\alpha} R^{,\alpha} X' + f_1' \right) g_{\mu\nu} \square \delta g^{\mu\nu} = \\ & = \int d^4x \sqrt{-g} \nabla^\beta M_\beta + \int d^4x \sqrt{-g} f \square \left(R_{,\alpha} R^{,\alpha} X' + f_1' \right) g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для остальных четырёх интегралов применяется аналогичная процедура (см. Приложение А). Подставляя преобразованные интегралы в выражение (2.2), записывается окончательный вид вариации действия (2.1):

$$\begin{aligned} \delta S = & \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R_{,\alpha} R^{,\alpha} X + f_1) + X' R_{\mu\nu} R_{,\alpha} R^{,\alpha} + X R_{,\mu} R_{,\nu} + \right. \\ & \left. + f_1' R_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) \left(R_{,\alpha} R^{,\alpha} X' + f_1' \right) - \right. \\ & \left. - 2 \nabla^\beta X \nabla_\beta R R_{\mu\nu} - 2 X \square R R_{\mu\nu} - 2 (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu) (\nabla^\beta X \nabla_\beta R + X \square R) \right] + \\ & + \int d^4x \sqrt{-g} \nabla^\beta M_\beta - \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\beta L^\beta + 2 \int d^4x \sqrt{-g} \nabla^\beta N_\beta + \\ & + 2 \int d^4x \sqrt{-g} \nabla^\beta P_\beta - 2 \int d^4x \sqrt{-g} \nabla^\beta V_\beta - \\ & - 2 \int d^4x \sqrt{-g} \nabla^\beta W_\beta + 2 \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\beta Z^\beta. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Следующим шагом применяется теорема Гаусса–Стокса для преобразования интегралов типа $\int d^4x \sqrt{-g} \nabla^s A_s$. Для любого векторного поля V^μ в римановом пространстве-времени с метрикой $g_{\mu\nu}$ справедливо:

$$\int_\Omega d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu V^\mu = \oint_{\partial\Omega} dS_\mu V^\mu, \quad (2.7)$$

где Ω – 4-мерная область интегрирования (например, всё пространство-время), $\partial\Omega$ – 3-мерная граница, dS_μ – элемент гиперповерхности на этой границе.

Физический принцип, лежащий в основе вариационного исчисления в полевых теориях, заключается в том, что вариации полей $\delta g_{\mu\nu}$ и их производных фиксированы на границе области (равны нулю). Это граничное условие позволяет нам отбрасывать поверхностные компоненты, возникающие при интегрировании по частям.

Для компоненты $f_1(R)$

$$\int d^4x \sqrt{-g} f'(R) \nabla_\mu V^\mu = \oint_{\partial\Omega} dS_\mu (f'(R) V^\mu) - \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\mu f'(R)) V^\mu. \quad (2.8)$$

Поверхностный интеграл обращается в ноль, так как на границе $\delta g_{\mu\nu} = 0$, а значит $V^\mu = 0$, поскольку V^μ линейно зависит от δg и его первых производных. В итоге, слагаемое со второй производной от вариации метрики преобразован в слагаемое, зависящее только от первой производной от функции $f'(R)$. Это именно тот результат, который нужен для получения корректных уравнений гравитационного поля.

С помощью теоремы Гаусса–Стокса и введения вспомогательных величин вида A_μ , A^ν граничные интегралы, содержащие производные от $\delta g_{\mu\nu}$ и δR могут быть преобразованы и сведены к нулю. Для этой процедуры используется граничное слагаемое Гиббонса–Йорка–Хоукинга. В $f(R)$ -гравитации вариация слагаемого Гиббонса–Йорка–Хоукинга записывается в виде:

$$\delta S'_{\text{ГЙН}} = 2 \oint_{\partial V} d^3 y \epsilon \sqrt{|h|} \left(f''(R) K \delta R + \frac{1}{2} f'(R) h^{\alpha\beta} \partial_\sigma (\delta g_{\beta\alpha}) n^\sigma \right). \quad (2.9)$$

Для того, чтобы граничное слагаемое обратилось в ноль, необходимо наложить условие:

$$\delta R|_{\partial V} = 0, \quad (2.10)$$

так как появляются слагаемые, содержащие δR . Наряду с вышеуказанным условием, должно выполняться условие $\delta g_{\mu\nu} = 0$ для корректной постановки вариационной задачи.

Проведя полную вариацию, учитывая все остальные слагаемые и используя описанную выше процедуру интегрирования по частям с применением теоремы Гаусса–Стокса, приходим к вакуумным уравнениям гравитационного поля

$$A_{\mu\nu} X + B_{\mu\nu} X' + C_{\mu\nu} X'' + F_{\mu\nu} X''' - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f_1 + f_1' R_{\mu\nu} + D_{\mu\nu} f_1' = 0, \quad (2.11)$$

где слагаемые сгруппированы по функциям X , f_1 и их производным, а также введены обозначения:

$$A_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_{,\alpha} R^{,\alpha} + R_{,\mu} R_{,\nu} - 2\Box R R_{\mu\nu} - 2D_{\mu\nu} \Box R, \quad (2.12)$$

$$B_{\mu\nu} = -R_{\mu\nu} R_{,\alpha} R^{,\alpha} - D_{ik} (R_{,\alpha} R^{,\alpha}) - 2\Box R D_{\mu\nu} R, \quad (2.13)$$

$$C_{\mu\nu} = -R_{,\alpha} R^{,\alpha} D_{\mu\nu} R - 2\Box R (g_{\mu\nu} R^{,\alpha} R_{,\alpha} - R_{,\mu} R_{,\nu}), \quad (2.14)$$

$$F_{\mu\nu} = -R_{,j} R^{,j} (g_{\mu\nu} R_{,\alpha} R^{,\alpha} - R_{,\mu} R_{,\nu}), \quad (2.15)$$

$$D_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu. \quad (2.16)$$

При обращении $X(R)$ в ноль уравнения (2.11) переходят в вакуумные уравнения $f(R)$ -гравитации:

$$-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + f'(R)R_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu)f' = 0, \quad (2.17)$$

где запятая во всех вышеуказанных уравнениях обозначает дифференцирование по координатам, а штрих – по скалярной кривизне. Таким образом, для действия (2.1) получены гравитационные уравнения $f(R, (\nabla R)^2)$ -гравитации вида $f_1(R) + X(R) \nabla_\mu R \nabla^\mu R$ в вакуумном случае, представленные выражением (2.11) с определёнными тензорными величинами $A_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$, $C_{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu}$, $D_{\mu\nu}$ в виде (2.12)–(2.16).

В данном разделе были получены уравнения гравитационного поля для $f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R) \nabla_\mu R \nabla^\mu R$ -гравитации в метрическом формализме. Применение вариационного принципа и учёт граничных условий позволили вывести гравитационные уравнения, обобщающие уравнения гравитации Эйнштейна и уравнения для $f(R)$ -гравитации. Полученные выражения являются основой для дальнейшего анализа космологических моделей на базе данной теории.

2.2 Уравнения космологической динамики на основе $f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R) \nabla_\mu R \nabla^\mu R$ -гравитации

Для анализа космологических следствий рассматриваемой модели обратимся к уравнениям гравитационного поля, записанным в метрике Фридмана–Робертсона–Уокера (ФРУ). Согласно космологическому принципу, Вселенная в крупных масштабах однородна и изотропна, а современные наблюдения (анизотропия реликтового излучения, распределение галактик) указывают на то, что её пространственная кривизна пренебрежимо мала. Это соответствует значению параметра кривизны $\kappa = 0$ в метрике ФРУ, то есть выбору пространственно-плоской геометрии.

В такой метрике эволюция Вселенной полностью описывается масштабным фактором $a(t)$, а динамика расширения задаётся уравнениями Фридмана, которые связывают $a(t)$ и параметр Хаббла $H = \dot{a}/a$ с плотностью энергии и

давлением космической среды. Модель пространственно-плоской Вселенной лежит в основе Λ CDM-модели, успешно объясняющей наблюдаемое ускоренное расширение.

Помимо согласия с данными наблюдений, выбор плоской метрики оправдан и с теоретической точки зрения: он позволяет существенно упростить математический формализм, не теряя при этом физической содержательности. Это даёт возможность детально исследовать ключевые процессы ранней и современной Вселенной – инфляцию, формирование крупномасштабной структуры, влияние тёмной энергии и тёмной материи, – а также находить точные решения в рамках МТГ. Таким образом, пространственно-плоская метрика ФРУ служит естественной и хорошо обоснованной основой для изучения космологической динамики.

Гравитационные уравнения модифицированной гравитации вида $f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R) \nabla_\mu R \nabla^\mu R$ в метрике ФРУ:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) (dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta)) d\phi^2), \quad (2.18)$$

где $a(t)$ – масштабный фактор, принимают вид:

$$A_\nu^\mu X + B_\nu^\mu X' + C_\nu^\mu X'' + F_\nu^\mu X''' - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu f_1 + f_1' R_\nu^\mu + D_\nu^\mu f_1' = 0, \quad (2.19)$$

где введены следующие тензорные величины:

$$A_\nu^\mu = -\frac{1}{2} \delta_\nu^\mu R_{,\alpha} R^{,\alpha} + R_{,\mu} R^{,\nu} - 2\Box R R_\nu^\mu - 2D_\nu^\mu \Box R, \quad (2.20)$$

$$B_\nu^\mu = -R_\nu^\mu R_{,\alpha} R^{,\alpha} - D_\nu^\mu (R_{,\alpha} R^{,\alpha}) - 2\Box R D_\nu^\mu R, \quad (2.21)$$

$$C_\nu^\mu = -R_{,\alpha} R^{,\alpha} D_\nu^\mu R - 2\Box R (\delta_\nu^\mu R^{,\alpha} R_{,\alpha} - R_{,\mu} R_{,\nu}), \quad (2.22)$$

$$F_\nu^\mu = -R_{,\alpha} R^{,\alpha} (\delta_\nu^\mu R_{,\alpha} R^{,\alpha} - R^{,\mu} R_{,\nu}), \quad (2.23)$$

$$D_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu \Box - \nabla^\mu \nabla_\nu. \quad (2.24)$$

Для удобства уравнение (2.19) разделяется на две части:

$$Q_\nu^\mu + L_\nu^\mu = 0, \quad (2.25)$$

где часть Q_ν^μ – содержит функцию $X(R)$ и её производные

$$Q_\nu^\mu = A_\nu^\mu X + B_\nu^\mu X' + C_\nu^\mu X'' + F_\nu^\mu X''', \quad (2.26)$$

след которой равен

$$Q = AX + BX' + CX'' + FX''', \quad (2.27)$$

а A , B , C , F определены (см. Приложение Б).

Часть L_ν^μ – содержит функцию $f(R)$ и её производные

$$L_\nu^\mu = -\frac{1}{2}\delta_\nu^\mu f_1 + f_1' R_\nu^\mu + D_\nu^\mu f_1', \quad (2.28)$$

причем, соответствующий след в этом случае имеет вид

$$L = -2f_1 + f_1' R + D f_1', \quad (2.29)$$

D определено (см. Приложение Б).

Таким образом, представлен общий формализм для рассматриваемой $f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R) \nabla_\mu R \nabla^\mu R$ -гравитации. Далее рассмотрены космологические решения этой модели, в которых внимание сосредоточено на инфляционных решениях.

В этом разделе уравнения МТГ были записаны для пространственно-плоской метрики ФРУ. Это позволило адаптировать общие уравнения к задачам космологии, получить модифицированные уравнения Фридмана и исследовать их поведение в различных предельных случаях. Показано, что модель естественным образом включает в себя как $f(R)$ -гравитацию, так и теорию гравитации Эйнштейна при соответствующих ограничениях на функции $f_1(R)$ и $X(R)$.

2.3 Представление $f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R) \nabla_\mu R \nabla^\mu R$ гравитации в виде тёмной космической жидкости

В рамках данного исследования представляет интерес интерпретация геометрических вкладов модифицированной гравитации в терминах эффективной среды – тёмной космической жидкости. Эта гипотетическая субстанция объединяет свойства тёмной материи и тёмной энергии, демонстрируя различное поведение в зависимости от масштаба. На уровнях галактик и скоплений она ведёт себя как тёмная материя, способствуя гравитационной конденсации вещества и формированию крупномасштабной структуры. В то же время

на космологических масштабах, в областях с низкой средней плотностью, её уравнение состояния приближается к вакуумоподобному, что обеспечивает наблюдаемое ускоренное расширение Вселенной.

Преимущество такого подхода заключается в возможности описания различных этапов эволюции Вселенной в рамках единой теоретической схемы. Концепции инфлатона и тёмной энергии при этом не отвергаются, но могут рассматриваться как эффективные описания отдельных режимов поведения тёмной космической жидкости. Это позволяет выйти за рамки стандартных уравнений гравитации и классической механики, предлагая новый инструмент для анализа сложных гравитационных и динамических процессов.

Рассматривается представление модели $f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R) \nabla_\mu R \nabla^\mu R$ гравитации в форме космической жидкости. Ненулевые компоненты тензора Риччи для метрики ФРУ представляются в виде:

$$R_0^0 = 3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_1^1 = R_2^2 = R_3^3 = \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} \quad (2.30)$$

и скалярная кривизна равна

$$R = 6 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} \right) = 6 \left(2H^2 + \dot{H} \right). \quad (2.31)$$

Для записи уравнения (2.19) в метрике ФРУ (2.18), вычисляются тензорные компоненты коэффициентов $A_0^0, A_1^1, A_2^2, A_3^3$ и т.д. в терминах параметра Хаббла H . В результате получаем

$$A_0^0 = 18 \left(24H^4\dot{H} - 10H^3\ddot{H} - 32\dot{H}^2H^2 - 12\ddot{H}H^2 - \right. \\ \left. - 24\ddot{H}H\dot{H} + 8\dot{H}^3 - 2H\ddot{H} + 2\dot{H}\ddot{H} - \ddot{H}^2 \right), \quad (2.32)$$

$$A_1^1 = A_2^2 = A_3^3 = 6 \left(72H^4\dot{H} - 6H^3\ddot{H} - 46\ddot{H}H^2 - 166\ddot{H}H\dot{H} - \right. \\ \left. - 40\dot{H}^3 - 18H\ddot{H} - 42\dot{H}\ddot{H} - 27\ddot{H}^2 - 2H^{(5)} \right), \quad (2.33)$$

$$B_0^0 = -1728 \left(H\ddot{H} + \frac{1}{4} \left(17H^2 - \dot{H} \right) \ddot{H} + H\dot{H} \left(H^2 + 3\dot{H} \right) \right) \left(H\dot{H} + \frac{1}{4}\ddot{H} \right), \quad (2.34)$$

$$B_1^1 = B_2^2 = B_3^3 =$$

$$= -576 \left(H\dot{H} + \frac{1}{4}\ddot{H} \right) \left(\frac{1}{2}\ddot{H} + \frac{11}{2}\dot{H} + \left(\frac{57}{4}H^2 + \frac{23}{4}\dot{H} \right) \ddot{H} + H\dot{H} \left(H^2 + 13\dot{H} \right) \right), \quad (2.35)$$

$$C_0^0 = -648H \left(4\dot{H}H + \ddot{H} \right)^3, \quad (2.36)$$

$$C_1^1 = C_2^2 = C_3^3 = -216 \left(4H\dot{H} + \ddot{H} \right)^2 \left(32\dot{H}H^2 + 20\ddot{H}H + 12\dot{H}^2 + 3\ddot{H} \right), \quad (2.37)$$

$$F_0^0 = 0, \quad F_1^1 = F_2^2 = F_3^3 = -1296 \left(4H\dot{H} + \ddot{H} \right)^4. \quad (2.38)$$

Уравнения гравитационного поля преобразуем так, чтобы влияние кривизны пространства-времени можно было представить в виде эффективной идеальной жидкости, а сами гравитационные уравнения – записать в канонической форме, аналогичной уравнениям Эйнштейна в ОТО. Для этого отдельно рассматривается $f(R)$ -компонента и тензор L_ν^μ , ненулевые компоненты которого равны:

$$L_0^0 = -3H^2 f_1' + \frac{Rf_1' - f_1}{2} - 3H\dot{R}f_1'', \quad (2.39)$$

$$L_1^1 = L_2^2 = L_3^3 = -\frac{1}{2}f_1 + \left(\frac{R}{2} - 2\dot{H} - 3H^2 \right) f_1' - \left(\ddot{R} + 2H\dot{R} \right) f_1'' - \left(\dot{R} \right)^2 f_1'''. \quad (2.40)$$

Так, выражение (2.25) представляем в форме тёмной космической жидкости, выделив слагаемые H^2 и $2\dot{H} + 3H^2$ следующим образом:

$$H^2 = \frac{1}{3f_1'} \left(\kappa\rho + \frac{Rf_1' - f_1}{2} - 3H\dot{R}f_1'' + A_0^0 X + B_0^0 X' + C_0^0 X'' \right), \quad (2.41)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = \frac{1}{f_1'} \left(-\kappa p - \frac{f_1 - Rf_1'}{2} - \left(\ddot{R} + 2H\dot{R} \right) f_1'' - \left(\dot{R} \right)^2 f_1''' - A_1^1 X - B_1^1 X' - C_1^1 X'' - F_1^1 X''' \right), \quad (2.42)$$

где ρ , p – плотность и давление тёмной космической жидкости. Полученные уравнения обобщают уравнения Фридмана для гравитации Эйнштейна.

Уравнения Фридмана в гравитации Эйнштейна описывают динамику однородной и изотропной Вселенной, рассматриваемой как пространство с метрикой ФРУ. Параметр Хаббла, входящий в уравнения, характеризует размер Вселенной во времени. При этом предполагается, что содержимое Вселенной представлено идеальной жидкостью с плотностью $\rho(t)$ и давлением $p(t)$, связанными через уравнение состояния.

Полученные уравнения (2.41)–(2.42) показывают, что динамика всей Вселенной, определяется не только плотностью энергии вещества, его давлением, параметром Хаббла, но и функциями f_1 , X скалярной кривизны R . Это приводит к различным сценариям космологической эволюции в зависимости от уравнения состояния вещества и выбора параметра Хаббла и функций от скалярной кривизны R .

Для рассматриваемой модели идеальная жидкость имеет компоненты плотности и давления, определяемые следующим образом:

$$\rho_{eff} = \frac{1}{f_1'} \left(\frac{Rf_1' - f_1}{2} - 3H\dot{R}f_1'' + A_0^0 X + B_0^0 X' + C_0^0 X'' \right), \quad (2.43)$$

$$p_{eff} = \frac{1}{f_1'} \left(\frac{Rf_1' - f_1}{2} + (\ddot{R} + 2H\dot{R}) f_1'' + (\dot{R})^2 f_1''' + A_1^1 X + B_1^1 X' + C_1^1 X'' + F_1^1 X''' \right). \quad (2.44)$$

Следовательно, в отсутствии идеальной жидкости ($\rho = p = 0$) уравнения (2.43)–(2.44) представляются в виде:

$$H^2 = \frac{\rho_{eff}}{3}, \quad 2\dot{H} + 3H^2 = -p_{eff}, \quad (2.45)$$

где вклад ρ_{eff} , p_{eff} является чисто геометрическим. В виду громозкости записи p_{eff} , ρ_{eff} уравнение состояния $\omega = p_{eff}/\rho_{eff}$ не выписывается, но определяется для каждого частного случая модели. Используя полученные уравнения Фридмана, можем рассмотреть некоторые космологические решения.

Рассмотрим модель космологической эволюции де Ситтера, при которой параметр Хаббла является постоянной величиной ($H = H_*$), при этом масштабный фактор экспоненциально зависит от времени $a(t) = a_0 e^{H_* t}$, при $H_* > 0$. В этом случае тензорные компоненты (2.32)–(2.38) зануляются, при этом функция $X(R)$ принимает произвольный вид. При этом часть, содержащая функцию $f_1(R)$ и её производные по скалярной кривизне, приводит к общей форме уравнений Фридмана для гравитации Эйнштейна. В терминах идеальной жидкости уравнения (2.43)–(2.44) упрощаются к виду:

$$-\frac{1}{2}f_1 + 3H_*^2 f_1' - \kappa p = 0, \quad (2.46)$$

$$-\frac{1}{2}f_1 + 3H_*^2 f_1' - \kappa \rho = 0. \quad (2.47)$$

Для случая вакуума ($p = \rho = 0$) решение дифференциальных уравнений (2.46)–(2.47) принимает вид:

$$f_1 = f_* e^{\frac{R}{6H_*^2}}, \quad (2.48)$$

где R , как решение дифференциального уравнения, является произвольной функцией времени t . Для случая де Ситтера, подставляя $R = 6H_*$, получаем $f_1 = f_*$, что соответствует космологической постоянной.

Полученное решение позволяет объединить экспоненциальный инфляционный режим (задаваемый $f_1(R)$) с возможностью произвольной настройки кинетического взаимодействия через $X(R)$, что даёт широкий класс инфляционных сценариев, включая стандартную инфляцию, мульти-полевые и киральные модели. В свою очередь свобода выбора $X(R)$ позволяет управлять спектром космологических возмущений, условиями выхода из инфляции и даже возможными нестандартными эффектами (например, изменением скорости распространения гравитационных волн или появлением новых типов нестабильностей) [107, 108].

Далее рассматривается модель квази-де Ситтера. Согласно работе [109], выбираем параметр Хаббла в виде:

$$H = H_* - 2\epsilon t, \quad (2.49)$$

где ϵ – бесконечно малая величина, $R \approx 12(H_*^2 - (4H_*t + 1)\epsilon)$, $\dot{H} \approx -2\epsilon$, $\dot{H}^2 = 0$. Так как скалярная кривизна R разбивается на части нулевого и первого приближения ($R = R_0 + \epsilon R_1$), аналогичным образом представляем разложение плотности и давления: $\rho(t) = \rho_0(t) + \epsilon \rho_1(t)$, $p(t) = p_0(t) + \epsilon p_1(t)$. Уравнения гравитационного поля принимают вид:

$$-864H_*^4\epsilon X - \frac{f_1}{2} + \left(\frac{R}{4} - 3\epsilon\right) f_1' + 144H_*^2\epsilon f_1'' = -\kappa(\rho_0 + \epsilon\rho_1), \quad (2.50)$$

$$-864H_*^4\epsilon X - \frac{f_1}{2} + \left(\frac{R}{4} + \epsilon\right) f_1' + 96H_*^2\epsilon f_1'' = -\kappa(p_0 + \epsilon p_1). \quad (2.51)$$

Полученные гравитационные уравнения аналогичны уравнениям работы [109] для случая вакуума, когда $p = \rho = 0$. Далее раскладываем уравнение (2.50) по нулевому и первому порядку ϵ

$$-\frac{f_1}{2} + \frac{R_0}{4} f_1' = -\kappa\rho_0, \quad (2.52)$$

$$-864H_*^4 X + \left(\frac{R_1}{4} - 3\right) f_1' + 144H_*^2 f_1'' = -\kappa\rho_1 \quad (2.53)$$

и определяем функции $f_1(R)$ и $X(R)$ для произвольного значения функций плотности ρ_0 и ρ_1 :

$$f_1(R) = \frac{-4\kappa e^{2R/R_0}}{R_0} \int \rho_0 e^{-2R/R_0} dR + C e^{2R/R_0}, \quad (2.54)$$

$$X(R) = \frac{1}{864H_*^4} \left[\kappa\rho_1 + \left(\frac{R_1}{4} - 3\right) f_1' + 144H_*^2 f_1'' \right]. \quad (2.55)$$

Для случая постоянной плотности вещества $\rho_0 = \rho_*$ выражения преобразуются к виду:

$$f_1(R) = 2\kappa\rho_* + C e^{2R/R_0}, \quad (2.56)$$

$$X(R) = \frac{1}{864H_*^4} \left[\kappa\rho_1 + \left(\frac{R_1}{4} - 3\right) \frac{2C e^{2R/R_0}}{R_0} + 144H_*^2 \frac{4}{R_0^2} e^{2R/R_0} \right]. \quad (2.57)$$

Повторяя процедуру разложения выражения (2.51) по нулевому порядку ϵ , с учётом (2.61)–(2.62), находим функцию давления вещества p_0 :

$$-\frac{f_1}{2} + \frac{R_0}{4} f_1' = -\kappa p_0. \quad (2.58)$$

На основании (2.52) и (2.58) связь функций давления и плотности в нулевом приближении принимает вид:

$$p_0 = \rho_0. \quad (2.59)$$

Для нулевого приближения получили предельно жесткое состояние вещества.

Вид функции p_1 из первого приближения принимает вид:

$$-864H_*^4 X + \left(\frac{R_1}{4} + 1\right) f_1' + 96H_*^2 f_1'' = -\kappa p_1. \quad (2.60)$$

Функции скалярной кривизны

$$f_1(R) = 2\kappa\rho_* + C e^{2R/R_0}, \quad (2.61)$$

$$X(R) = \frac{1}{864H_*^4} \left[\kappa p_1 + \left(\frac{R_1}{4} + 1\right) \frac{2C e^{2R/R_0}}{R_0} + 96H_*^2 \frac{4}{R_0^2} e^{2R/R_0} \right]. \quad (2.62)$$

Связь функций давления и плотности в первом приближении принимает вид:

$$\kappa p_1 = \kappa\rho_1 + \left(\frac{192H_*^2}{R_0^2} - \frac{4}{R_0}\right) C e^{2R/R_0}. \quad (2.63)$$

Указанный подход дает возможность описать космологическую эволюцию на фоне модифицированной гравитации, что важно для сопоставления теоретических предсказаний моделей с наблюдаемыми параметрами реликтового излучения и крупномасштабной структуры.

Выбранный подход с параметром Хаббла $H = H_* - 2\epsilon t$ даёт возможность построения жизнеспособных космологических моделей, которые совместимы с наблюдаемым ускоренным расширением Вселенной и могут служить альтернативой или дополнением к стандартной Λ CDM-модели. Вследствие функциональной зависимости $f_1(R)$ от материальных характеристик и возможности описания возмущений, эта теория способствует более глубокому пониманию космологической динамики и роли модифицированной гравитации в его эволюции.

В результате рассмотрения $f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R) \nabla_\mu R \nabla^\mu R$ -гравитации с использованием представления в форме космической жидкости получены уравнения, приводимые к канонической форме уравнений Фридмана с эффективными геометрическими плотностью и давлением. Анализ на примере модели де Ситтера и квази-де Ситтера показал, что рассматриваемая модель способна объединять экспоненциальную инфляцию с гибкой настройкой кинетического взаимодействия через функцию $X(R)$, что расширяет возможности описания широкого класса космологических сценариев. При этом квази-деситтеровский режим позволяет описать среду, соответствующую предельному жёсткому веществу. В целом, полученные результаты подчёркивают перспективность данного класса модифицированных гравитационных теорий для глубокого понимания эволюции Вселенной и стимулируют дальнейшие исследования с учётом наблюдательных данных.

2.4 Скалярно-тензорный эквивалент для $f_1(R) + X(R) \nabla_\mu R \nabla^\mu R$ -гравитации

Соответствие скалярно-тензорной теории рассчитывается по методу, представленному в работе [33]. Следуя методу, вводится обозначение:

$$\Phi(R, R_{,\mu}) = f_1(R) + X(R) R_{,\mu} R^{,\mu}, \quad (2.64)$$

что позволяет записать следующее действие:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \Phi(R, R_{,\mu}) + S_M. \quad (2.65)$$

Далее, выполняя замену $\xi = R$, $\xi_\mu = R_{,\mu}$ и, преобразовывая функцию $\Phi(\xi, \xi_\mu)$ к виду

$$\Phi(\xi, \xi_\mu) = f_1(\xi) + X(\xi) \xi_\mu \xi^\mu, \quad (2.66)$$

записываются следующие условия:

$$\det \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \xi_\mu} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_\nu \partial \xi} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_\nu \partial \xi_\mu} \end{array} \right) = \det \left(\begin{array}{cc} f_1'' + X'' \xi_\mu \xi^\mu & 2X' g^{\mu\nu} \xi_\nu \\ 2X' g^{\mu\nu} \xi_\mu & 2X g^{\mu\nu} \end{array} \right) \neq 0. \quad (2.67)$$

Для простоты аргументы функции не прописываются, а штрих будет означать производную по ξ .

Задавая ϕ и ϕ^μ в виде:

$$\phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = f_1' + X' \xi_\mu \xi^\mu, \quad (2.68)$$

$$\phi^\mu = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\mu} = 2X \xi^\mu, \quad (2.69)$$

записывается потенциал $U(\phi, \phi_\mu)$. Для этого в выражение потенциала

$$U(\xi, \xi_\mu) = \phi \xi + \phi^\mu \xi_\mu - \Phi(\xi, \xi_\mu) \quad (2.70)$$

вместо $\Phi(\xi, \xi_\mu)$ подставляется (2.66), а вместо $\phi^\mu \xi_\mu$, на основании (2.69), $\phi_\mu / (2X)$, тогда потенциал принимает вид:

$$U(\phi, \phi_\mu) = \phi \xi + \phi^\mu \xi_\mu - f_1(\xi) - X(\xi) \xi_\mu \xi^\mu. \quad (2.71)$$

Последнее слагаемое, на основе (2.69) можно записать как $\phi^\mu \phi_\mu / (4X)$, тогда потенциал (2.72) принимает вид:

$$U(\phi, \phi_\mu) = \phi \xi - f_1 + \frac{\phi^\mu \phi_\mu}{4X}. \quad (2.72)$$

Интеграл действия $S' = S'(\phi, \phi^\mu, R, R_{,\mu})$ в этом случае равен

$$S' = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi R + \phi^\mu R_{,\mu} - \phi \xi + f_1 - \frac{\phi^\mu \phi_\mu}{4X} \right] + S_M. \quad (2.73)$$

Используя замены $\sqrt{-g}\phi^\mu R_{,\mu} = \partial_\mu(\sqrt{-g}\phi^\mu R) - \sqrt{-g}\nabla_\mu\phi^\mu R$ и $\psi = (\phi - \nabla_\mu\phi^\mu)$, (2.73) преобразуется к виду:

$$S' = \int d^4x\sqrt{-g} \left[\psi R - \xi(\psi + \nabla_\mu\phi^\mu) + f_1(\psi, \phi_\mu, \nabla_\mu\phi^\mu) - \frac{\phi^\mu\phi_\mu}{4X} \right] + S_M. \quad (2.74)$$

Следовательно, скалярно-тензорный эквивалент для (2.65) есть выражение вида

$$S' = \int d^4x\sqrt{-g} [\psi R - U(\psi, \phi_\mu, \nabla_\mu\phi^\mu)] + S_M, \quad (2.75)$$

где потенциал U скалярных полей ψ , ϕ принимает вид:

$$U(\psi, \phi_\mu, \nabla_\mu\phi^\mu) = \xi(\psi + \nabla_\mu\phi^\mu) - f_1 + \frac{\phi^\mu\phi_\mu}{4X}, \quad (2.76)$$

а ξ и f_1 – функции скалярных полей ψ , ϕ

$$\xi = \xi(\psi, \phi_\mu, \nabla_\mu\phi^\mu), \quad (2.77)$$

$$f_1 = f(\psi, \phi_\mu, \nabla_\mu\phi^\mu), \quad (2.78)$$

что следует из (2.68). Обратим внимание, что получили теорию типа Бранса–Дикке без кинетического слагаемого для соответствующего действия Бранса–Дикке. Варьируя действие (2.75), получаем уравнения поля [33]:

$$\psi G_{\mu\nu} - (\nabla_\mu\nabla_\nu\psi - g_{\mu\nu}\square\psi) + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}U = kT_{\mu\nu}, \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial U}{\partial\psi} = R, \quad (2.80)$$

$$\frac{\partial U}{\partial\psi^\sigma} - \nabla^\mu \frac{\partial U}{\partial(\nabla_\mu\phi^\sigma)} = 0, \quad (2.81)$$

$$\frac{\delta L_M}{\delta\varphi} = R. \quad (2.82)$$

Подставляя потенциал из уравнения (2.76) в (2.79), после некоторых преобразований получаем:

$$\psi\xi + 3\square\psi + 2\xi\nabla_\mu\psi^\mu - 2f_1 + \frac{\phi^\mu\phi_\mu}{2X} - kT = 0. \quad (2.83)$$

Уравнение (2.81) с учетом (2.76) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \xi}{\partial \phi^\sigma} (\psi + \nabla_\mu \psi^\mu) - \frac{\partial f_1}{\partial \phi^\sigma} + \frac{2\phi_\mu X - \frac{\partial X}{\partial \phi^\sigma} \phi^\mu \phi_\mu}{4X^2} - \\ & - \nabla_\mu \left(\frac{\partial \xi}{\partial (\nabla_\mu \phi^\sigma)} (\psi + \nabla_\mu \psi^\mu) + \xi - \frac{\partial f_1}{\partial (\nabla_\mu \phi^\sigma)} - \frac{\phi^\mu \phi_\mu}{4X^2} \frac{\partial X}{\partial (\nabla_\mu \phi^\sigma)} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Теперь рассматриваем действие Старобинского–Подольского

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[R + \frac{c_0}{2} R^2 + \frac{c_1}{2} R_{,\mu} R^{,\mu} \right] + S_M, \quad (2.85)$$

где c_0, c_1 – произвольные постоянные величины, для которого условие (2.67) записывается в виде:

$$\det \left(\begin{vmatrix} c_0 & 0 \\ 0 & c_1 g^{\mu\nu} \end{vmatrix} \right), \quad (2.86)$$

а уравнение (2.83) преобразуется к виду:

$$-3\Box\psi - kT - 2 \left(\frac{1}{2c_0} (\psi + \nabla_\mu \psi^\mu - 1)^2 + \frac{\phi^\mu \phi_\mu}{2c_1} \right), \quad (2.87)$$

а выражение (2.84) имеет вид такой же как в работе [33], то есть

$$\frac{\phi_\mu}{c_1} - \nabla_\mu \left(\frac{1}{2c_0} (\psi + \nabla_\nu \psi^\nu - 1) \right) = 0. \quad (2.88)$$

Записан скалярно-тензорный эквивалент для исходной модели с функцией (2.64). Переписывая действие в форме, аналогичной теории Бранса–Дикке, но без кинетического слагаемого для ψ , были получены уравнения поля, связывающие эти поля с исходной гравитационной динамикой через потенциал U , зависящий от ψ , ϕ_μ и их производных. При этом общая структура уравнений задает динамику полей с учетом более сложной зависимости от $f_1(\xi)$ и $X(\xi)$, что отражает расширенный характер исходной функции Φ .

Рассмотрение конкретного примера, модели Старобинского–Подольского с действием, включающим квадратичные поправки R^2 и слагаемое с производными скалярной кривизны, существенно упрощает общую картину. В данной модели функции f_1 и X принимают более простой вид ($f_1(R) = R + \frac{c_0}{2} R^2$, $X(R) = \frac{c_1}{2}$) соответственно, что приводит к диагональному виду матрицы второго производного Φ . Соответственно, уравнения для полей ψ , ϕ_μ упрощаются и

имеют известные решения: уравнение для скалярного поля включает оператор Д'Аламбера с источником, зависящим от материи и потенциала, а связь поля с индексом μ и производными скалярного поля даёт возможность выразить ϕ_μ через производные ψ , благодаря чему уравнения этой модели становятся проще и легче для анализа по сравнению с более общей формой.

Таким образом, модель Старобинского–Подольского следует рассматривать как частный случай более общей скалярно-тензорной теории с функцией Φ , демонстрируя наглядно, как сложные функциональные зависимости могут быть сведены к более простым и изученным структурам. При этом отсутствует кинетическое слагаемое для ψ , что отличает общую теорию от классической модели Бранса–Дикке, но в случае Старобинского–Подольского кинетическое слагаемое проявляется за счет ϕ_μ , создавая тем самым эффективную динамику. Это позволяет считать модель Старобинского–Подольского реалистичной и практически применимой иллюстрацией предложенного формализма, подчеркивающей универсальность и гибкость скалярно-тензорных подходов в описании расширенных гравитационных моделей.

В этом разделе рассмотрено скалярно-мульти-тензорное представление исходной теории, что позволило свести уравнения высшего порядка к системе уравнений второго порядка для нескольких взаимодействующих полей. Такой эквивалент облегчает анализ динамики модели и её космологических следствий, а также устанавливает связь с хорошо изученными скалярно-тензорными и мульти-полевыми инфляционными моделями, что расширяет область применимости полученных результатов.

2.5 Выводы к Главе 2

В Главе 2 проделана работа по формулировке и изучению космологической динамики в рамках МТГ вида $f_1(R) + X(R) \nabla_\mu R \nabla^\mu R$, которая содержит две функции скаляра кривизны R : $f_1(R)$, $X(R)$. Это существенно расширяет возможности классической $f(R)$ -гравитации, в которой учитывается лишь функциональная зависимость от R .

В данной главе впервые получены уравнения космологической динамики для указанной МТГ, которые включают производные шестого порядка по

временному параметру масштабного фактора $a(t)$. Такой высокий порядок уравнений отражает более сложную динамику, связанную с производными кривизны, дающей новые кинематические и динамические возможности для описания эволюции Вселенной.

Показано, что при выборе $X(R) = 0$ модель переходит в классическую $f(R)$ -гравитацию, а при $f_1(R) = R$, $X(R) = 0$ – к гравитации Эйнштейна, что свидетельствует о вложенной структуре рассматриваемой теории и её способности объединять классические и расширенные модели гравитации.

В рамках космологических приложений в пространственно-плоской метрике ФРУ получены уравнения, позволяющие представить вклады от модификаций гравитации в виде эффективной идеальной жидкости с собственной плотностью и давлением. Такой подход облегчает физическую трактовку и даёт возможность применять стандартные методы космологического анализа и интерпретации наблюдений.

Рассмотрены важные классы космологических решений, среди которых:

- режим де Ситтера, при котором параметр Хаббла H постоянен, а масштабный фактор растёт экспоненциально;
- квази-де Ситтера режим, при котором параметр Хаббла содержит бесконечно малую величину ϵ : $H = H_* - 2\epsilon t$.

В этих случаях модели способны воспроизводить успешные сценарии инфляции без необходимости ввода дополнительных экзотических компонентов, таких как тёмная энергия или новые поля.

Для квази-де Ситтера режима рассмотрен подход, где параметр Хаббла принимает вид $H(t) = H_* - 2\epsilon t$, приводящий к простым выражениям для функций $f(R)$ и $X(R)$, способным описывать фазу предельно жесткого состояния вещества.

Подробный математический вывод скалярно-мульти-тензорного эквивалента позволяет связать исходную МТГ с действием, содержащим два скалярных поля и потенциал взаимодействия. В частности, модель Старобинского–Подольского с квадратичной поправкой и кинетическим слагаемым является частным случаем рассматриваемой $f_1(R) + X(R) \nabla_\mu R \nabla^\mu R$ -гравитации.

На основе исследований главы второй, вынесено следующее положение на защиту:

1. Инфляционные решения для экспоненциальной и квазиэкспоненциальной эволюции масштабного фактора в пространственно-плоской вселенной Фридмана в модифицированной теории гравитации вида $f_1(R) + X(R) \nabla_\mu R \nabla^\mu R$.

Материал Главы 2 изложен в публикациях: [\[109, 127\]](#).

Глава 3. Киральная космологическая модель $f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R) \nabla_\mu R \nabla^\mu R$ -гравитации

Глава 3 посвящена исследованию ККМ, основанной на МТГ с лагранжианом вида $f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R) \nabla_\mu R \nabla^\mu R$. В последние годы такие расширения стандартных гравитационных моделей привлекают значительное внимание благодаря своей способности описывать сложную динамику ранней и поздней Вселенной без введения экзотических компонент материи. ККМ, возникающие в рамках МТГ, позволяют более гибко моделировать инфляционные и постинфляционные процессы, а также получать новые типы решений, которые могут быть сопоставлены с современными наблюдательными данными.

В данной главе проводится систематический переход от исходной МТГ к эквивалентной ККМ, что позволяет интерпретировать динамику скалярной кривизны и её производных в терминах взаимодействующих скалярных полей. Особое внимание уделяется поиску точных аналитических решений, а также анализу возможности сведения многополевой модели к однополевой. Такой подход не только упрощает вычисление космологических параметров, но и позволяет выявить принципиальные отличия между исходной киральной моделью и её однополевым аналогом. Проведённое сравнение демонстрирует, в каких случаях переход к однополевой модели оправдан, а в каких – приводит к потере существенных физических эффектов, важных для описания эволюции Вселенной.

3.1 Переход к киральной космологической модели

В работе [31] рассматривается наиболее общая форма теории $f(R)$ -гравитации высшего порядка. Для модели $f(R)$ -гравитации высшего порядка

$$f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R) \nabla_\mu R \nabla^\mu R \quad (3.1)$$

применяется процедура перехода к эйнштейновской гравитации со скалярными полями. Используя метод, описанный в [31], рассматривается эквивалентная

модель с действием в картине Йордана:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g_J} [f_1(\phi) + X(\phi)\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}g_J^{\mu\nu} + \lambda(R_J - \phi)], \quad (3.2)$$

где $\sqrt{-g_J}$ – определитель метрики $g_J^{\mu\nu}$, обеспечивающий инвариантность действия относительно преобразований координат; $g_J^{\mu\nu}$ – метрика в картине Йордана; $f_1(\phi), X(\phi)$ – функция скалярного поля ϕ ; слагаемое $X(\phi)\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}g_J^{\mu\nu}$ – играет роль кинетической составляющей скалярного поля, причём $\phi_{,\nu}$ – производная скалярного поля; $\lambda(R_J - \phi)$ – связь между скалярной кривизной R_J (рассчитанной для метрики $g_J^{\mu\nu}$) и полем ϕ через множитель Лагранжа λ , который обеспечивает условие $R_J = \phi$, что характерно для теорий с нединамической кривизной [111].

Преобразование выбрано так, что $\phi = R$ и $\phi_{,\mu} = R_{,\mu}$. Применяя конформное преобразование, осуществляется переход от картины Йордана к картине Эйнштейна. Для этого необходимо выделить компонент неминимального взаимодействия в выражении действия S (3.2), что позволит более точно проанализировать динамические свойства системы. Этот шаг является существенным для дальнейшего изучения взаимодействий в контексте выбранного подхода. Действие (3.2) преобразуется к виду:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g_J} \left[\frac{(2\lambda)R_J}{2} + f_1(\phi) + X(\phi)\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}g_J^{\mu\nu} - \lambda\phi \right]. \quad (3.3)$$

Согласно преобразованию, описанному в [112], получается следующая связь $\frac{F(\lambda)R}{2} = \frac{(2\lambda)R}{2}$, то есть $F(\lambda) = 2\lambda$, где λ – скалярное поле. Конформное преобразование записывается следующим образом:

$$g_{\mu\nu}^E = \Omega^2 g_{\mu\nu}^J, \quad g_{\mu\nu}^J = \Omega^{-2} g_{\mu\nu}^E, \quad \sqrt{-g_J} = \Omega^{-4} \sqrt{-g_E}. \quad (3.4)$$

Используются вышеприведенные соотношения в конформном преобразовании скалярной кривизны:

$$R_J = \Omega^2 (R_E + 6\Box_E \omega - 6g_E^{\mu\nu} \omega_{,\mu}\omega_{,\nu}), \quad (3.5)$$

где $\omega = \ln \Omega$, $\omega_{,\mu} = \partial_\mu \omega$.

Часть с λR в действии преобразуется следующим образом

$$\int d^4x \sqrt{-g_J} \frac{1}{2} (2\lambda) R^J =$$

$$= \int d^4x \sqrt{-g_E} \Omega^{-4} 2\lambda \Omega^2 \frac{1}{2} (R_E + 6\Box_E \omega - 6g_E^{\mu\nu} \omega_{,\mu} \omega_{,\nu}). \quad (3.6)$$

Чтобы получить гравитацию Эйнштейна, фиксируется $2\lambda\Omega^2\Omega^{-4} = 1$, при этом $\Omega^2 = 2\lambda$, $\omega = \ln \sqrt{2\lambda}$, $\omega_{,\mu} = \frac{1}{2} \frac{\lambda_{,\mu}}{\lambda}$. Таким образом, действие (3.2) преобразуется к виду:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g_E} \left(\frac{R_E}{2} + 3\Box_E f_1 - 3g_E^{\mu\nu} \omega_{,\mu} \omega_{,\nu} + \Omega^{-4} f_1(\phi) + \right. \\ \left. + X(\phi) \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} g_E^{\mu\nu} \Omega^{-4} - \Omega^{-4} \lambda \phi \right). \quad (3.7)$$

Затем, устраняя 4-дивергенцию $\Box_E f_1$, используя переход к картине Эйнштейна и представляя конформную функцию Ω в терминах λ , записывается окончательный вид действия:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g_E} \left(\frac{R_E}{2} - \frac{3}{4\lambda^2} g_E^{\mu\nu} \lambda_{,\mu} \lambda_{,\nu} + \frac{f_1(\phi)}{4\lambda^2} + \frac{X(\phi) \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} g_E^{\mu\nu}}{2\lambda} - \frac{\phi}{4\lambda} \right). \quad (3.8)$$

Вводится новое скалярное поле соотношением $\lambda = \exp(\sqrt{2/3}\chi)$ для записи канонической формы для скалярного поля χ в (3.8). Таким образом, действие (3.8) записывается в виде:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g_E} \left(\frac{R_E}{2} - \frac{1}{2} g_E^{\mu\nu} \chi_{,\mu} \chi_{,\nu} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} f_1(\phi) e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} - \frac{1}{4} \phi e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} + \frac{1}{2} X e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} g_E^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} \right). \quad (3.9)$$

Действие (3.9) описывает ККМ, которая включает в себя два киральных поля: $\varphi^1 = \chi$, $\varphi^2 = \phi$. Эта модель также оперирует с двумерной метрикой на пространстве целей $\left(ds^2 = d\chi^2 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} X(\phi) d\phi^2 \right)$ с компонентами $h_{11} = 1$, $h_{22} = -e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} X(\phi)$; $h_{12} = h_{21} = 0$ и потенциалом взаимодействия $W = \frac{1}{4} e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(\phi - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} f_1(\phi) \right)$, что позволяет исследовать структурные особенности взаимодействий данных полей в контексте космологической динамики.

Такое представление модели позволяет записать уравнения модели (3.2) в метрике ФРУ, используя, согласно работе [13], уравнения космологической динамики двухкомпонентной ККМ:

$$3H^2 = \frac{1}{2} \dot{\chi}^2 - \frac{1}{2} e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} X(\phi) \dot{\phi}^2 + \frac{1}{4} e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(-\phi + e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} f_1(\phi) \right), \quad (3.10)$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}\dot{\chi}^2 + \frac{1}{2}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}X(\phi)\dot{\phi}^2, \quad (3.11)$$

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2\sqrt{\frac{2}{3}}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}X(\phi) + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}\left(\phi - 2e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}f_1(\phi)\right) = 0, \quad (3.12)$$

$$X(\phi)\left(-3H\dot{\phi} - \ddot{\phi} + \sqrt{\frac{2}{3}}\dot{\chi}\dot{\phi}\right) - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2X'(\phi) - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}f_1'(\phi) = 0. \quad (3.13)$$

Не предполагаем переход к новому полю с целью привести X к единице, так как это может затруднить процедуру интегрирования.

В результате проведённого в 3.1 анализа осуществлён переход от МТГ с производными скалярной кривизны к эквивалентной ККМ. Такой подход позволил исключить высшие производные из уравнений движения и свести задачу к рассмотрению динамики взаимодействующих скалярных полей с определённой киральной метрикой и потенциалом. Полученные результаты создают основу для дальнейшего исследования точных решений модели, а также для сопоставления её предсказаний с однополевыми космологическими моделями и наблюдательными данными.

3.2 Примеры специальных решений

Рассматривается специальное решение для $\chi = \chi_0 = const$. В этом случае система уравнений (3.10)–(3.13) сводится к трем уравнениям:

$$\dot{H} = \frac{1}{2}e^{-\sqrt{2/3}\chi_0}\epsilon\dot{\phi}^2, \quad (3.14)$$

$$f_1(\phi) = -e^{2\sqrt{2/3}\chi_0}\left(12H^2 + 8\dot{H}\right), \quad (3.15)$$

$$\phi = -e^{\sqrt{2/3}\chi_0}\left(24H^2 + 12\dot{H}\right). \quad (3.16)$$

Вычисляя производную по времени от ϕ , возводя её в квадрат, подставляя в (3.14), записывается нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка от H :

$$\dot{H} = \frac{1}{2}e^{-\sqrt{2/3}\chi_0}\epsilon\left(48H\dot{H} + 12\ddot{H}\right)^2. \quad (3.17)$$

В контексте модели космологической инфляции полезно рассмотреть, как оно соотносится с основными характеристиками инфляционного этапа расширения Вселенной.

Инфляция характеризуется быстрым (почти экспоненциальным) ростом масштабного фактора $a(t)$, что соответствует почти постоянному параметру Хаббла $H(t) \approx \text{const}$ на инфляционной стадии. Решение для $H(t)$ из данного уравнения при подходящих параметрах ϵ и χ_0 может обеспечивать такой режим, когда \dot{H} мал, а H стабилен или медленно меняется, что соответствует фазе медленного скатывания.

Параметры ϵ и χ_0 определяют характер эволюции параметра Хаббла $H(t)$. Если ϵ мал, а χ_0 велик, решение близко к инфляционному сценарию с плавным экспоненциальным расширением. В противном случае в системе могут возникать более сложные режимы — например, быстрые переходы или бифуркации, что связано с влиянием квантовых поправок или эффектов модифицированной гравитации.

В космологии часто используют подход, где задаётся форма масштабного фактора $a(t)$ или параметра Хаббла $H(t)$, а затем подбирается потенциал скалярного поля или параметры модели, обеспечивающие такую эволюцию. Аналогично, уравнение (3.17) с высшими производными и параметром ϵ можно рассматривать как модификацию классического уравнения Фридмана, где ϵ задаёт поправки, влияющие на начальную стадию инфляции и переход к классическому расширению.

Модель с уравнением (3.17), содержащим вторую производную \ddot{H} , естественно описывает переход от начального скачка расширения (пограничного слоя) к более медленному расширению, согласованному с классической космологией Фридмана. Это даёт более точное описание ранней инфляции и её окончания.

При рассмотрении $\epsilon = \text{const}$ для уравнения (3.17) можно найти решение де Ситтера ($H = \text{const}$, $\phi = \text{const}$, $f_1 = \text{const}$). Другие решения весьма проблематично найти из-за сложности вида уравнений. В общем случае имеет смысл вернуться к рассмотрению $X(\phi)$ вместо ϵ .

При $\chi_0 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \ln 2$, получается следующая система уравнений:

$$\dot{H} = X(\phi)\dot{\phi}^2, \quad (3.18)$$

$$f_1(\phi) = -3H^2 - 2\dot{H}, \quad (3.19)$$

$$\phi = -12H^2 - 6\dot{H}. \quad (3.20)$$

Предполагая, что $X(\phi) = \dot{H}$, уравнение (3.18) имеет решение $\phi = \mp\phi_0 \pm t$, где $\phi_0 > 0$. Согласно этому решению, выражение (3.20) принимает вид:

$$\mp\phi_0 \pm t + 12H^2 + 6\dot{H} = 0. \quad (3.21)$$

Точное решение полученного уравнения выражается в спецфункциях, а именно через функции Эйри A_i, B_i :

$$H = \frac{1}{2} \frac{C_1 A_i' \left(\frac{\phi_0 - t}{\sqrt[3]{3}} \right) + C_2 B_i' \left(\frac{\phi_0 - t}{\sqrt[3]{3}} \right)}{C_1 A_i \left(\frac{\phi_0 - t}{\sqrt[3]{3}} \right) + C_2 B_i \left(\frac{\phi_0 - t}{\sqrt[3]{3}} \right)}, \quad (3.22)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные интегрирования, а штрих обозначает производную функции Эйри по её аргументу. Условие $\phi_0 > 0$ определяет конкретное значение константы и влияет на точку, где аргумент функций Эйри меняет знак. Функции Эйри $A_i' \left(\frac{\phi_0 - t}{\sqrt[3]{3}} \right)$ и $B_i' \left(\frac{\phi_0 - t}{\sqrt[3]{3}} \right)$ обладают характерным поведением, которое отражает физическую картину инфляционной космологии. При положительных значениях аргумента функция $A_i' \left(\frac{\phi_0 - t}{\sqrt[3]{3}} \right)$ экспоненциально убывает к нулю, а $B_i' \left(\frac{\phi_0 - t}{\sqrt[3]{3}} \right)$ экспоненциально растёт. Это означает, что для $t > \phi_0$ $C_1 A_i' \left(\frac{\phi_0 - t}{\sqrt[3]{3}} \right) + C_2 B_i' \left(\frac{\phi_0 - t}{\sqrt[3]{3}} \right)$ может демонстрировать экспоненциальный рост или спад в зависимости от выбора констант C_1, C_2 .

При $t < \phi_0$ аргумент отрицателен, и обе функции Эйри ведут себя как колебательные функции с убывающей амплитудой. Это соответствует фазе, где параметр Хаббла $H(t)$ меняет характер с почти постоянного значения на колебательный и убывающий режим. Для $t < \phi_0$ (отрицательный аргумент функций Эйри) параметр Хаббла близок к постоянному значению, что соответствует фазе ускоренного экспоненциального расширения Вселенной – инфляции.

При $t \approx \phi_0$ происходит переходный режим, когда характер решения меняется, что отражает выход из инфляционной стадии.

Для $t > \phi_0$ (положительный аргумент) $H(t)$ начинает убывать и может демонстрировать колебания, что соответствует постинфляционной эволюции Вселенной с замедлением расширения. Таким образом, аналитическое решение через функции Эйри обеспечивает естественное и гладкое описание перехода между фазой инфляции и последующей космологической динамикой. Выбор констант интегрирования позволяет моделировать различные сценарии инфляционной эволюции, включая длительность инфляции и характер выхода из неё.

Использование функций Эйри в решении уравнения для параметра Хаббла подчёркивает важность специальных функций в космологии и даёт мощный инструмент для исследования ранних этапов расширения Вселенной и согласования теоретических моделей с наблюдательными данными.

Далее рассматриваем приближенное решение: при малых $t \dot{H} \ll H^2$. Решение уравнения (3.21) относительно H :

$$H = \sqrt{\frac{1}{12}(\pm\phi_0 \mp t)}. \quad (3.23)$$

В решении параметр Хаббла зависит от времени t и некоторой константы ϕ_0 , что отражает динамику инфлатонного поля или другого скалярного поля, управляющего инфляцией.

При выборе знаков так, что подкоренное выражение уменьшается с ростом времени, например, $H = \sqrt{\frac{1}{12}(\phi_0 - t)}$, параметр Хаббла убывает и стремится к нулю при $t \rightarrow \phi_0$. Это может соответствовать окончанию инфляционного периода, когда экспоненциальное расширение замедляется и переходит в стандартную фазу расширения Вселенной.

При обратном выборе знаков, например, $H = \sqrt{\frac{1}{12}(-\phi_0 + t)}$, параметр Хаббла растёт с временем, что менее типично для классической инфляции, но может описывать начало или фазу ускоренного расширения.

Критическая точка $t = \phi_0$, при которой $H = 0$, знаменует переход между фазами расширения.

Инфляционная стадия характеризуется почти постоянным или медленно меняющимся параметром Хаббла, обеспечивающим экспоненциальный рост масштабного фактора $a(t) \approx e^{Ht}$. Решение с корнем от линейной функции времени может описывать приближённую модель с постепенным изменением H , например, при учёте отклонений от идеального состояния с $p = \rho$ и динамической эволюцией скалярного поля.

Полученное решение представляет собой простой аналитический пример, наглядно иллюстрирующий переход от инфляционной стадии к фазе стандартного космологического расширения. Оно описывает временную эволюцию параметра Хаббла $H(t)$, зависящую от времени и начального условия ϕ_0 , и демонстрирует смену ускоренного расширения замедленным — характерную

черту инфляционной стадии. Такое поведение полностью согласуется с общепринятыми представлениями о завершении инфляции и переходе Вселенной к последующим этапам эволюции.

Такое аналитическое выражение полезно для качественного понимания динамики инфляции и её окончания, хотя более точные модели используют уравнения поля инфлатона и численные методы.

Рассмотрим степенную инфляцию $H = \frac{m}{t}$. Для системы (3.18)–(3.20) точное решение выглядит следующим образом:

$$X(\phi) = -\frac{1}{4} \frac{m(1-2m)^2}{\phi^2}, \quad (3.24)$$

$$f_1(\phi) = \frac{2-3m}{6(1-2m)} \phi, \quad (3.25)$$

$$\phi = \frac{6m}{t^2} (1-2m), \quad (3.26)$$

$$V = \frac{1-3m}{3(1-2m)} \frac{\phi}{2}. \quad (3.27)$$

Функция $X(\phi)$ связана с кинетической компонентой скалярного поля. Зависимость от $1/\phi^2$ указывает на сильную нелинейность при малых значениях поля ϕ . Линейная зависимость функции $f_1(\phi)$ от ϕ с коэффициентом, зависящим от параметра m , показывает, что $f_1(\phi)$ может играть роль функции сопряжённого поля, влияющей на эволюцию инфляции. Поле ϕ пропорционально $1/t^2$, т.е. убывает с ростом t . Такое поведение скалярного поля типично в расширяющейся Вселенной. Зависимость от m и $(1-2m)$ показывает, что параметр m контролирует скорость убывания поля. Потенциал линейно зависит от ϕ , что нетипично для стандартных моделей инфляции и задаёт нетривиальную форму энергии поля, которая может приводить к специфическим фазам инфляции или к её окончанию. Знак и величина коэффициента зависят от m , что влияет на форму и динамику инфляции.

Данное точное решение описывает модель инфляции с временно меняющимся параметром Хаббла и скалярным полем с нетрадиционной динамикой и потенциалом, что может быть полезно для изучения альтернативных сценариев инфляции и перехода к стандартной космологии.

Следует отметить, что при $m = \frac{1}{3}$ потенциал обращается в ноль, при этом функции $X(\phi)$, $f_1(\phi)$, $\phi(t)$ определяются следующим образом:

$$X(\phi) = -\frac{1}{108\phi^2}, \quad f_1(\phi) = \frac{1}{2}\phi, \quad \phi = \frac{2}{3t^2}. \quad (3.28)$$

В разделе 3.2 рассмотрены конкретные примеры точных решений для киральной космологической модели, ассоциированной с модифицированной теорией гравитации вида $f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R)\nabla_\mu R\nabla^\mu R$. Полученные решения демонстрируют возможность описания различных сценариев эволюции Вселенной, включая как степенную, так и квазиэкспоненциальную динамику масштабного фактора. Проведённый анализ подтверждает эффективность выбранного подхода к поиску аналитических решений и подчёркивает роль функций $f_1(R)$ и $X(R)$ в формировании космологической динамики. Результаты данного раздела служат основой для дальнейшего исследования физических свойств моделей и их сопоставления с наблюдательными данными.

3.3 Космологические модели с дополнительным материальным полем

Рассматриваются космологические модели, содержащие кроме геометрических скалярных полей ϕ и χ , некоторое дополнительное поле Φ , которое определяет материальную компоненту.

В этом случае уравнения динамики в пространственно-плоской вселенной ФРУ

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2\delta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (3.29)$$

записываются следующим образом [113]:

$$3H^2 - \rho_m - \frac{1}{2}\dot{\chi}^2 + \frac{1}{4}e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} (f_1(\phi) + X(\phi)g_J^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi) - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(\frac{\phi}{2} - \dot{\phi}^2 X(\phi)e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \right) = 0, \quad (3.30)$$

$$3H^2 + 2\dot{H} = \quad (3.31)$$

$$= p_m + \frac{1}{2}\dot{\chi}^2 + \frac{1}{4}e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} (f_1(\phi) + X(\phi)g_J^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi) - \frac{1}{4}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}\phi = 0, \quad (3.32)$$

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} + \frac{1}{2\sqrt{6}}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left[-\phi + \dot{\phi}^2 X(\phi)e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \right] + \frac{1}{\sqrt{6}}e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} (f_1(\phi) + X(\phi)g_J^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi) = 0, \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6}e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left[\dot{\phi} \left(-9H + \sqrt{6}\dot{\chi} \right) - 3\ddot{\phi} \right] X(\phi) - 2e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \dot{\phi}^2 X'(\phi) - \\ & - \frac{1}{4}e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} (f_1'(\phi) + X'(\phi) g_J^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi) + \frac{1}{4}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} = 0, \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m) = 0, \quad (3.35)$$

где $H = \dot{a}/a$ – параметр Хаббла, точка обозначает производную по космическому времени t , ρ_m и p_m – плотность энергии и давление материального поля Φ . Уравнение (3.35) есть закон сохранения энергии поля Φ в расширяющейся вселенной Фридмана.

Далее, рассмотрим специальный вид функций $f_1(\phi) = \frac{\phi}{2} - \xi f(\phi)$, $X(\phi) = -\frac{\xi}{2}$ (представляет собой модификацию случая, рассмотренного в работе [113]), где ξ – постоянная неминимального взаимодействия и скалярное поле $\chi_0 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \ln 2$. В этом случае уравнения космологической динамики (3.30)–(3.35) принимают вид:

$$3H^2 - \rho_m - \frac{\xi}{2}\dot{\phi}^2 - \xi f = 0, \quad (3.36)$$

$$3H^2 + 2\dot{H} + p_m + \frac{\xi}{2}\dot{\phi}^2 - \xi f = 0, \quad (3.37)$$

$$\xi\dot{\phi}^2 - 4\xi f + \phi = 0, \quad (3.38)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\dot{f}}{\phi} = 0, \quad (3.39)$$

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m) = 0. \quad (3.40)$$

Таким образом, данная система является замкнутой системой уравнений с пятью неизвестными функциями $H = H(t)$, $\phi = \phi(t)$, $f = f(t)$, $\rho_m = \rho_m(t)$, $p_m = p_m(t)$. Нелинейность уравнений (3.36)–(3.40) подразумевает, что давление и плотность энергии материального поля Φ определяется эволюцией геометрического поля ϕ .

Система уравнений (3.36)–(3.40) имеет следующие точные аналитические решения для произвольного поля $\phi(t) \neq const$:

$$H(t) = -\frac{1}{12} \left(\frac{1 + 6\xi\ddot{\phi}}{\xi\dot{\phi}} \right), \quad (3.41)$$

$$f(t) = \frac{1}{4} \left(\dot{\phi}^2 + \frac{1}{\xi}\phi \right), \quad (3.42)$$

$$\rho_m(t) = \frac{1}{48\xi\dot{\phi}^2} \left[1 + 12\xi\ddot{\phi} \left(1 + 3\xi\ddot{\phi} \right) - 12\xi^2\dot{\phi}^2 \left(1 + 3\xi\dot{\phi}^2 \right) \right], \quad (3.43)$$

$$p_m(t) = \frac{1}{48\xi\dot{\phi}^2} \left[-1 - 12\xi\ddot{\phi} \left(7 + \frac{5}{3}\xi\ddot{\phi} \right) + 12\xi^2\dot{\phi} \left(\dot{\phi}\phi + 4\ddot{\phi} - \xi\dot{\phi}^3 \right) \right]. \quad (3.44)$$

Например, для логарифмической эволюции геометрического поля

$$\phi(t) = \frac{1}{\alpha} \ln(\beta t), \quad (3.45)$$

где α и β – некоторые постоянные, из выражений (3.41)–(3.44) записываются следующие точные решения:

$$H(t) = -\frac{1}{12\xi t} (\alpha t^2 - 6\xi), \quad (3.46)$$

$$f(t) = \frac{1}{4\alpha^2\xi t^2} (\alpha t^2 \ln(\beta t) + \xi), \quad (3.47)$$

$$\rho_m(t) = \frac{1}{48\alpha^2\xi^2 t^2} [\alpha^4 t^4 - 12\xi\alpha^3 t^2 - 12 \ln(\beta t)\alpha\xi^2 t^2 + 36\xi^2\alpha^2 - 36\xi^3], \quad (3.48)$$

$$p_m(t) = -\frac{1}{48\alpha^2\xi^2 t^2} [\alpha^4 t^4 - 20\xi\alpha^3 t^2 - 12 \ln(\beta t)\alpha\xi^2 t^2 - 12\xi^2\alpha^2 + 12\xi^3]. \quad (3.49)$$

Из обратной зависимости $t = t(\phi)$ определяется вид функции

$$f(\phi) = \frac{1}{4\xi\alpha^2} (\alpha\phi + \xi\beta^2 e^{-2\alpha\phi}), \quad (3.50)$$

а из определения $H = \dot{a}/a$ находится масштабный фактор

$$a(t) = a_0 t^{1/2} \exp\left(-\frac{\alpha}{24\xi} t^2\right), \quad (3.51)$$

который соответствует экспоненциально-степенному типу инфляционной динамики.

Теперь рассмотрим эволюцию параметра состояния $w_m = p_m/\rho_m$, который характеризует изменение свойств материального поля в течение инфляции для $\xi = -1/3$, вводя переобозначение для космического времени следующим образом: $t \rightarrow |t - t_e|$, где t_e – время завершения стадии инфляции, что не меняет полученных решений (3.45)–(3.51). Материальное поле Φ переходит в течение инфляции от состояния вакуума де Ситтера $w_m = -1$ к состоянию, соответствующему предельно жесткому веществу $w_m = 1/3$ [114–118], связанный, в данном случае, с эволюцией скалярного поля ϕ . Таким образом, предложенная модель подразумевает естественный выход из стадии инфляции [113, 114].

В разделе 3.3 исследованы космологические модели, включающие дополнительное материальное поле. Показано, что его наличие существенно влияет на динамику расширения Вселенной и может приводить к новым типам решений уравнений космологической эволюции. Проведённый анализ демонстрирует, что взаимодействие между геометрическими и материальными компонентами существенно расширяет класс возможных космологических сценариев и позволяет более гибко описывать наблюдаемые свойства Вселенной.

3.4 Геометрическая связь между решениями

Здесь указывается переход от стартовой метрики к новой метрике в терминах параметра Хаббла. Согласно [119], формула связи функции Хаббла новой H_N и исходной H_S имеет вид:

$$H_N = \frac{1}{\sqrt{F}} \left(H_S + \frac{\dot{F}}{2F} \right), \quad F = \Omega^2. \quad (3.52)$$

В данном контексте символ точки обозначает производную по исходному времени t , которое связано с новым временным параметром τ через соотношение $d\tau = \sqrt{F}dt$. Следовательно, возможно определить преобразование функции неминимальной связи $F(\phi)$, с помощью которого можно переводить указанное значение H_N в соответствующее значение H_S .

Пусть $H_N = \frac{m}{t}$, $H_S = \frac{n}{t}$, т.е. добиваемся перехода степенной инфляции в степенную. Подставляя данные значения в (3.52), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение 1-ого порядка, которое решается стандартным способом относительно F – функции связи. Таким образом, значение функции связи имеет вид:

$$F = \frac{n^2}{(m - t^n)^2}. \quad (3.53)$$

Отсюда видно, сохраняя степень, можно уравнять показатели степени ($m = n$), тогда

$$F = \frac{n^2}{(n - t^n)^2}. \quad (3.54)$$

Для решения де Ситтера ($H = H^* = const$), выражение (3.52) представляет собой выражение вида: $H_N^* = \frac{1}{\sqrt{F}} \left(\frac{\dot{F}}{2F} + H_S^* \right)$. Решение полученного уравнения: $\Omega = \sqrt{F} = \frac{H_S}{H_N - \exp(H_S t)}$. Отсюда видно, что решение де Ситтера в новой метрике можно получить в исходной метрике при однозначном представлении конформного множителя.

В разделе 3.4 исследована геометрическая связь между найденными решениями киральной космологической модели. Установлено, что определённые преобразования переменных и параметров позволяют получать новые решения из уже известных, а также выявлять эквивалентность различных описаний космологической динамики. Такой подход способствует более глубокому пониманию структуры пространства решений и облегчает классификацию возможных эволюционных сценариев в рамках модифицированной гравитации.

3.5 Спектральные космологические параметры

$f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R) \nabla_\mu R \nabla^\mu R$ -гравитации

Важным критерием проверки корректности моделей космологической инфляции является сравнение спектральных характеристик космологических возмущений в этих моделях с данными наблюдений, полученными из измерений анизотропии реликтового излучения [122].

Критерием проверки инфляционных моделей является верхний предел отношения квадратов амплитуд тензорных и скалярных космологических возмущений (тензорно-скалярное отношение) $r < 0,028$ [122]. Чтобы показать жизнеспособность $f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R) \nabla_\mu R \nabla^\mu R$ -гравитации, рассматривается метод расчёта космологических параметров, основанный на редукции исходной ККМ к однополевой космологической модели.

Модель с действием

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} f(R, (\nabla R)^2), \quad (3.55)$$

где $(\nabla R)^2 = g^{\mu\nu} \nabla_\mu R \nabla_\nu R$, $f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R) \nabla_\mu R \nabla^\mu R$, следуя подходу Наруко и др. [31], была сведена к ККМ [91] с действием

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left(\frac{R}{2} - \frac{1}{2} h_{AB}(\varphi) \partial_\mu \varphi^A \partial_\nu \varphi^B g^{\mu\nu} - W(\varphi) \right), \quad (3.56)$$

где метрика пространства целей

$$ds^2 = d\chi^2 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} X(\phi) d\phi^2, \quad \varphi^1 = \chi, \quad \varphi^2 = \phi. \quad (3.57)$$

Потенциал взаимодействия

$$W(\chi, \phi) = \frac{1}{4} e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(\phi - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} f_1(\phi) \right). \quad (3.58)$$

ККМ-представление модели (3.56) дает возможность применить результаты работы [91] для представления уравнения космологической динамики в метрике ФРУ в виде уравнений (3.10)–(3.13).

Для демонстрации соответствия данным наблюдений модели (3.55) применяется метод сведения ККМ к однополевой модели, предполагая линейную зависимость между полями:

$$\phi(t) = k\chi(t), \quad k = \text{const}. \quad (3.59)$$

Соотношения между производными по космическому времени

$$\dot{\phi}(t) = k\dot{\chi}(t), \quad \ddot{\phi}(t) = k\ddot{\chi}(t) \quad (3.60)$$

и производными по полю ϕ

$$\frac{dX}{d\phi} = k^{-1} \frac{dX}{d\chi}, \quad \frac{df_1}{d\phi} = k^{-1} \frac{df_1}{d\chi} \quad (3.61)$$

необходимо учитывать в действии (3.56). Результирующее действие принимает вид:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g_E} \left(\frac{R_E}{2} - \frac{1}{2} \left[1 - k^2 X(\chi) e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \right] g_E^{\mu\nu} \chi_{,\mu} \chi_{,\nu} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} f_1(\chi) e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} - \frac{1}{4} k\chi e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \right). \quad (3.62)$$

Уравнения космологической динамики (3.10)–(3.13) с учётом введенных соотношений преобразуется к виду:

$$3H^2 = \frac{1}{2}\dot{\chi}^2 - \frac{1}{2}k^2 e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} X(\chi)\dot{\chi}^2 + \frac{1}{4}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(-k\chi + e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} f_1(\chi) \right), \quad (3.63)$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}\dot{\chi}^2 \left(1 - k^2 e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} X(\chi) \right), \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} - \frac{1}{2}k^2\dot{\chi}^2 e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left[-\sqrt{\frac{2}{3}}X(\chi) + \frac{dX}{d\chi} \right] + \\ + \frac{1}{4}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(2\sqrt{\frac{2}{3}}f_1(\chi) - \frac{df_1}{d\chi} \right) - \sqrt{\frac{2}{3}}k\chi + k \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Следствие из уравнений (3.63) и (3.64) находится, как и в случае стандартной теории гравитации Эйнштейна:

$$3H^2 + \dot{H} = W(\chi, k\chi) = \frac{1}{4}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(-k\chi + e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} f_1(\chi) \right), \quad (3.66)$$

где штрих означает производную по полю χ .

Для применения метода Иванова–Салопека–Бонда (ИСБ) [120] используется (3.63)–(3.64) и свобода выбора кинетической функции $X(\chi)$. Переходя к зависимости функции Хаббла от поля χ для (3.64), находим связь между параметром Хаббла и кирального поля χ :

$$H' = -\frac{1}{2}\dot{\chi} \left(1 - k^2 e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} X(\chi) \right). \quad (3.67)$$

Выбор функции $X(\chi)$ может привести к увеличению или уменьшению скорости изменения параметра Хаббла при изменении поля χ . Рассматривается случай, который позволяет использовать подход ИСБ без существенных модификаций. Для этого функция $X(\chi)$ выбирается следующим образом:

$$X(\chi) = \pm e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}, \quad (3.68)$$

что позволяет свести уравнение (3.66) к следующему:

$$3H^2 - \frac{2(H')^2}{1 \pm k^2} = \frac{1}{4}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(-k\chi + e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} f_1(\chi) \right). \quad (3.69)$$

Если предположить $k = 0$, то воспроизводится уравнение ИСБ для космологии Фридмана с потенциалом (3.66).

Теперь рассмотрим алгоритм расчета спектральных космологических параметров (скалярный спектральный индекс n_s , тензорно-скалярное отношение r и спектр мощности \mathcal{P}_S) на примере точного решения для массивного скалярного поля [120]. Действие для модели одним скалярным полем записывается в виде:

$$S_{sf} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{R}{2} - \frac{1}{2} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} g^{\mu\nu} - V(\varphi) \right\}. \quad (3.70)$$

Используется набор точных решений для модели скалярного поля (3.70), перечисленных в монографии [120].

Точное решение для массивного скалярного поля, определяемого потенциалом

$$V(\varphi) = \frac{m^2 \varphi^2}{2} - \frac{m^2}{3} \quad (3.71)$$

и параметром Хаббла

$$H(\varphi) = m \sqrt{\frac{1}{6}} \varphi, \quad (3.72)$$

при котором эволюция скалярного поля принимает вид

$$\varphi(t) = -m \sqrt{\frac{2}{3}} t + \varphi_c = -m \sqrt{\frac{2}{3}} (t - t_*), \quad (3.73)$$

где t_* время окончания расширения Вселенной, при этом $(t - t_*) < 0$. Важно, что ускорение Вселенной заканчивается раньше, чем расширение. Рассматривая инфляционную стадию эволюции Вселенной, предполагается, что время достаточно близко к нулю и для простоты принимается $(t - t_*) = t < 0$.

Параметр Хаббла и масштабный фактор в терминах космологического времени принимают вид:

$$H(t) = \frac{(t_* - t) m^2}{3}, \quad a(t) = a_* \exp \left(-\frac{m^2}{6} (t - t_*)^2 \right). \quad (3.74)$$

При анализе инфляционной стадии особое внимание уделяется поведению масштабного фактора и его производных. Для $(t - t_*) < 0$ экспонента в выражении для $a(t)$ возрастает по мере удаления t влево от t_* , что соответствует характерной особенности инфляции: при движении в прошлое относительно момента t_* масштабный фактор экспоненциально растёт. Такая динамика отражает режим ускоренного расширения, когда Вселенная за короткое время многократно увеличивает свои размеры.

Первая производная от масштабного фактора определяется выражением

$$\dot{a}(t) = \frac{a_* m^2}{3} (t - t_*) \exp\left(-\frac{m^2}{6} (t - t_*)^2\right). \quad (3.75)$$

При $(t - t_*) < 0$ производная масштабного фактора положительная, что указывает на монотонное увеличение масштабного фактора – Вселенная расширяется. Причём скорость этого расширения максимальна при больших по модулю $(t - t_*)$.

Вторая производная масштабного фактора

$$\ddot{a}(t) = a_* \exp\left(-\frac{m^2}{6} (t - t_*)^2\right) \left(\frac{m^2}{3} (t - t_*)^2 - \frac{m^4}{9}\right) \quad (3.76)$$

содержит две составляющие: отрицательную постоянную и положительную квадратичную. При малых $|t - t_*|$ доминирует отрицательная часть, и $\ddot{a}(t) < 0$ – расширение замедляется. Однако при больших по модулю отрицательных $(t - t_*)$ квадратичная часть становится преобладающей, и $\ddot{a}(t) > 0$ – расширение ускоряется. Именно этот режим ускоренного расширения соответствует инфляционной фазе, когда $\ddot{a}(t) > 0$ и Вселенная испытывает экспоненциальный рост.

В рассматриваемой области $H(t) > 0$, что подтверждает расширяющийся характер Вселенной. При этом $H(t)$ убывает по мере приближения к t_* , отражая постепенное замедление темпов инфляционного расширения и предвещая переход к постинфляционной эволюции.

Для $(t - t_*) < 0$ модель описывает классическую инфляционную стадию: масштабный фактор растёт экспоненциально, его производные указывают на ускоренное расширение (при больших $|t - t_*|$), параметр Хаббла велик и положителен. Такое поведение масштабного фактора решает ключевые проблемы стандартной космологической модели: объясняет высокую однородность, изотропию и плоскость Вселенной, а также закладывает основу для формирования наблюдаемой крупномасштабной структуры космоса.

Таким образом, динамика $a(t)$ и его производных при $(t - t_*) < 0$ в инфляционной космологии отражает фундаментальные свойства ранней Вселенной: стремительное, ускоренное расширение пространства, обусловленное физикой скалярного поля с отрицательным давлением. Эта стадия не только обеспечивает согласие с наблюдаемыми свойствами Вселенной, но и формирует условия для последующего формирования материи и структуры космоса.

Также, соответствие модели (3.62) достигается выбором кинетической функции $X(\chi)$ из (3.68) и функции $f_1(\varphi)$ следующего вида:

$$f_1(\varphi) = 4 \exp\left(\frac{k2\sqrt{2}\varphi}{\sqrt{3(1 \mp k^2)}}\right) \left(\frac{m^2\varphi^2}{2} - \frac{m^2}{3}\right) + \exp\left(\frac{k\sqrt{2}\varphi}{\sqrt{3(1 \mp k^2)}}\right) \frac{k^2\varphi}{\sqrt{1 \mp k^2}}. \quad (3.77)$$

Так, отношения между полями выглядят следующим образом:

$$\phi = k\chi; \quad \varphi = \sqrt{1 \mp k^2}\chi; \quad \phi = \frac{k\varphi}{\sqrt{1 \mp k^2}}. \quad (3.78)$$

Напоминая формальное соответствие $\phi = k\chi$ скалярной кривизне R , отметим, что $f_1(R)$ часть стандартного представления, содержащего следующие составляющие $Ae^{c_1R}R^2 + Be^{c_1R/2}R - Ce^{c_1R}$, которые появляются в теории струн [70, 121].

Теперь рассчитываются *точные инфляционные* параметры, определенные в [120]. Первый параметр можно найти из соотношения

$$\epsilon = 2 \left(\frac{H'_\varphi}{H}\right)^2 = -\frac{\dot{H}}{H^2}. \quad (3.79)$$

Результат для модели (3.71)–(3.73)

$$\epsilon = \frac{3}{m^2 t^2}. \quad (3.80)$$

Далее переходим к зависимости параметра Хаббла от количества е-фолдов $N(t) = -\int H(t)dt = \frac{m^2 t^2}{6}$. Используя (3.79) в $H = H(N)$ представлении

$$\epsilon = -\frac{dH}{dN} \frac{\dot{N}}{H^2} \quad (3.81)$$

и используя зависимости от времени, рассчитывается $\frac{dH}{dN}$ в виде:

$$\frac{dH}{dN} = \frac{1}{t}. \quad (3.82)$$

Учитывая зависимость параметра Хаббла от времени $H(t) = \frac{m^2}{2}t$ находится зависимость $t(N) = \frac{\sqrt{6N}}{m}$. Таким образом, определяется зависимость $\epsilon = \epsilon(N)$ в виде $\epsilon = \frac{1}{2N}$. Если взять $N = 65$, то $\epsilon = 0,0077$. Расчет второго точного инфляционного параметра $\delta = 2\frac{H''}{H} = -\frac{\ddot{H}}{2H\dot{H}}$ дает $\delta = 0$.

Для определения скалярного спектрального параметра n_S воспользуемся уточненной формулой [120, 123]

$$n_S - 1 = 2 \left(\frac{\delta - 2\epsilon}{1 - \epsilon}\right). \quad (3.83)$$

В результате получаем $n_S \simeq 0.9690$. Таким образом, результат с хорошей точностью соответствует данным наблюдений космической миссии Planck [122].

Тензорный спектральный параметр для этой модели определяется соотношением

$$n_T = -\frac{2\epsilon}{1-\epsilon} \quad (3.84)$$

и равно $n_T = -0,0155$.

Тензорно-скалярное отношение определим формулой

$$r = 4s\epsilon, \quad (3.85)$$

где $s = 1$ или $s = 4$ – величина нормировки тензорных возмущений. При $s = 1$ тензорно-скалярное отношение $r = 0,0031$ и $r = 0,0031 < 0,028$ в соответствии с данными наблюдений; при $s = 4$, $r = 0,1232$ результат не соответствует наблюдательным данным.

Для согласования модели по спектру мощности скалярных возмущений используется уточненная формула [120, 123]

$$\mathcal{P}_S(k) = \frac{1}{2\epsilon} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \quad (3.86)$$

и экспериментальное значение $\mathcal{P}_S(k) = 2,1 \times 10^{-9}$ [122]. В результате получаем, что масса скалярного поля φ определяется соотношением $m^2 = 6,25 \times 10^{-11}$. Из сравнения действия (3.62), с учетом (3.68), определяется соотношение между массами поля φ и χ : $m_\varphi = m_\chi / \sqrt{1 \mp k^2}$. То есть, если необходимо согласовать с определенной массой частицы, масса m_φ может быть уменьшена или увеличена. Этот факт подчеркивает различие между однополевой и многополевой моделями, то есть из-за наличия других полей возможно эффективное изменение массы для однополевой модели.

Рассмотрим пример промежуточной инфляции. Промежуточные инфляционные модели были введены в рассмотрение в работе [124], а недавно были проведены исследования космологических параметров и сопоставление их с данными наблюдений в [125]. Рассматриваем промежуточную инфляцию в другом представлении: случай инфляционной модели, основанной на полиномиальном потенциале с параметром Хаббла $H(\varphi) = A\varphi^m$. Решение для этого случая

представляются в виде:

$$V(\varphi) = 3A^2\varphi^{2m} - 2A^2m^2\lambda\varphi^{2(m-1)}, \quad (3.87)$$

$$\varphi(t) = [c_1 + 2Am(m-2)t]^{\frac{1}{2-m}}, \quad (3.88)$$

$$H(t) = A[c_1 + 2Am(m-2)t]^{\frac{m}{2-m}}, \quad (3.89)$$

$$a(t) = a_s \exp\left(-\frac{1}{4m}[c_1 + 2mA(m-2)t]^{\frac{2}{2-m}}\right), \quad (3.90)$$

где A , m и c_1 произвольные постоянные. Для соответствия этим решениям функция $f_1(\varphi)$ выбирается в следующем виде:

$$\begin{aligned} f_1(\varphi) = & 4 \exp\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{6}{1 \mp k^2}} \varphi\right) \left(3A^2\varphi^{2m} - 2A^2m^2\lambda\varphi^{2(m-1)}\right) + \\ & + \exp\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{1 \mp k^2}} \varphi\right) \frac{k\varphi}{\sqrt{1 \mp k^2}}. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Инфляционные параметры для этой модели принимают вид:

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = 2m^2 [c_1 + 2Am(m-2)t]^{\frac{2}{m-2}}, \quad (3.92)$$

$$\delta = -\frac{\ddot{H}}{2H\dot{H}} = 2m(m-1) [c_1 + 2Am(m-2)t]^{\frac{2}{m-2}}, \quad (3.93)$$

со следующими связями между ними:

$$\delta = \left(\frac{m-1}{m}\right) \epsilon. \quad (3.94)$$

Из числа e -фолдов

$$N = -\frac{1}{4m} [c_1 + 2mA(m-2)t]^{\frac{m}{m-2}} \quad (3.95)$$

получаем уравнение

$$c_1 + 2mA(m-2)t = -(4mN)^{1-\frac{m}{2}}. \quad (3.96)$$

Из обратной зависимости $t = t(N)$ имеем

$$\mathcal{P}_S(N) = 16^{\frac{2m-1}{2-m}} \left(\frac{A}{4\pi m}\right)^2 \left[2^{-m+2}(mN)^{1-\frac{m}{2}}\right]^{\frac{2(m+1)}{2-m}}, \quad (3.97)$$

$$\mathcal{P}_S(N = 60) = 2.14 \times 10^{-9}. \quad (3.98)$$

Из этого условия для $m = 1/3$ получаем $A = 10^{-5}$.

Тензорно-скалярное отношение равно

$$r = \frac{4sm(n_S - 1)}{m(n_S - 3) - 2}. \quad (3.99)$$

Например, для $m = 1/3$ и $n_S = 0,968$ нужно $r(s = 4) = 0,064 > 0,032$ и $r(s = 1) = 0,016 < 0,028$.

Таким образом, рассмотренный тип инфляционной модели удовлетворяет наблюдательным ограничениям, в том числе по нормировке амплитуды спектра реликтовых гравитационных волн.

В разделе 3.5 проведён расчёт космологических параметров в рамках моделей типа $f(R)$ -гравитации. Полученные значения спектрального индекса скалярных возмущений, тензорно-скалярного отношения и других характеристик сопоставлены с данными современных наблюдений. Проведённый анализ подтвердил, что рассматриваемые модели способны удовлетворять актуальным космологическим ограничениям, а также позволил выявить условия, при которых теоретические предсказания наилучшим образом согласуются с экспериментальными данными.

3.6 Выводы к Главе 3

В ходе проведённого исследования в Главе 3 была построена ККМ, ассоциированная с МТГ вида $f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R)\nabla_\mu R \nabla^\mu R$, которая обобщает классическую $f(R)$ -гравитацию, учитывая дополнительные кинетические компоненты производных скалярной кривизны.

При помощи методов вариационного исчисления и конформного преобразования исходная теория гравитации высшего порядка была сведена к двум взаимодействующим скалярным полям с определённой киральной метрикой пространства целей и потенциалом взаимодействия. Такой переход снимает проблему уравнений шестого порядка и позволяет использовать математический аппарат многополевых киральных моделей для анализа космологической динамики.

В работе найдены точные аналитические решения уравнений ККМ, описывающие разные сценарии космологической эволюции: как степенную инфляцию

с динамическим параметром Хаббла $H(t) = m/t$, так и квазиэкспоненциальные (инфляционные) режимы. При этом подробно изучены особенности поведения скалярных полей и их влияния на масштабный фактор, потенциал и кинетическую энергию модели.

Модель обобщена путём включения дополнительного материального поля, рассматриваемого как идеальная баротропная жидкость, что позволило изучить взаимодействие геометрических и материальных степеней свободы в рамках космологической динамики. Найдены точные решения, демонстрирующие переход материального поля в ходе инфляции от состояния, подобного вакууму (с уравнением состояния $\omega \approx -1$), к состоянию излучения ($\omega = 1/3$), что обеспечивает естественный выход из инфляции и начало постинфляционной эволюции.

Установлены преобразования между решениями с различными анзацами, позволяющие получать новые решения из уже известных путём соответствующих изменений в функции киральной метрики и параметрах конформного преобразования. Это способствует комплексному пониманию структуры решения и расширяет возможности по классификации и генерации космологических сценариев.

На основе построенной ККМ было выполнено сведение модели к однополевой форме, что позволило вычислить ключевые спектральные параметры: скалярный спектральный индекс n_s , тензорно-скалярное отношение r и спектр мощности возмущений P_s . Проведённые расчёты для сценариев степенной и промежуточной инфляции демонстрируют хорошее согласие с данными космической обсерватории Planck (2018), что свидетельствует о физической состоятельности и реализуемости предложенных моделей.

Получены основания для применения ККМ с несколькими скалярными полями в исследовании МТГ с производными скалярной кривизны, что расширяет понимание механизмов инфляции и динамики ранней Вселенной. Создана методология, способная объединить многополевые инфляционные модели с наблюдательными данными, включая обработку спектральных характеристик возмущений.

По результатам исследования, изложенного в Главе 3, обосновано следующее положение, выносимое на защиту:

2. Точные решения, описывающие степенную и промежуточную (между степенной и экспоненциальной) инфляцию, согласованные с наблюдательными

данными космической обсерватории Planck по спектральным космологическим параметрам для двухкомпонентной киральной космологической модели, построенной для $f(R, (\nabla R)^2)$ -гравитации.

Результаты, представленные в Главе 3, опубликованы в работах [128], [129].

Глава 4. Киральная космологическая модель $f(R, \square R)$ -гравитации

В ходе предыдущей главы был подробно рассмотрен метод сведения $f(R, (\nabla R)^2)$ -гравитации к эквивалентной теории с двумя скалярными полями, что позволило сформулировать ККМ и исследовать её динамические свойства. Такой подход, основанный на учёте производных скалярной кривизны второго порядка, расширяет класс допустимых космологических сценариев и открывает новые возможности для описания эволюции Вселенной на ранних этапах её существования.

В настоящей главе внимание уделяется другому направлению обобщения $f(R)$ -гравитации – рассмотрению моделей, в которых функция действия зависит от скалярной кривизны и её производной 2-го порядка, записанной через оператор Д’Аламбера: $f = f(R, \square R)$. Подобные теории, относящиеся к классу гравитации высшего порядка, содержат в уравнениях движения производные от метрики вплоть до четвёртого порядка, что существенно влияет на структуру космологических решений и их физическую интерпретацию.

Особый интерес к моделям вида $f(R, \square R)$ обусловлен их способностью описывать не только стандартные инфляционные сценарии, но и более сложные режимы расширения, а также возможностью устранения некоторых проблем классической космологии, таких как сингулярности или необходимость введения экзотических компонент материи. Кроме того, такие модификации позволяют построить мультискалярные эквиваленты теории, что облегчает анализ фазового пространства и поиск точных решений.

В данной главе будет проведён переход к ККМ для $f(R, \square R)$ -гравитации, рассмотрены особенности её динамики, а также приведены примеры аналитических решений и их связь с наблюдательными данными. Исходное действие имеет вид:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [f(R, \square R)], \quad (4.1)$$

что определяет постановку задач главы 4.

4.1 Переход к киральной космологической модели

Чтобы получить соответствующую теорию гравитации Эйнштейна со скалярными полями, следуя методу, предложенному в [31], необходимо ввести множители лагранжа $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\Lambda}_2$ с соответствующими дополнительными полями ϕ , B так, что действие (4.1) преобразуется к виду

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[f(\phi, B) - \tilde{\lambda}(\phi - R) - \tilde{\Lambda}_2(B - \square R) \right]. \quad (4.2)$$

Вариация действия (4.2) по скалярным полям приводит к уравнениям, определяющим динамику лагранжевых множителей.

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} - \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial \phi}(\phi - R) - \tilde{\lambda} - \frac{\partial \tilde{\Lambda}_2}{\partial \phi}(B - \square R) = 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial B} - \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial B}(\phi - R) - \frac{\partial \tilde{\Lambda}_2}{\partial B}(B - \square R) - \tilde{\Lambda}_2 = 0. \quad (4.4)$$

Далее после введения замены переменных [31]

$$\lambda = \tilde{\lambda} + \square \tilde{\Lambda}_2, \quad \Lambda_2 = \tilde{\Lambda}_2. \quad (4.5)$$

в действии (4.2) и интегрирования по частям, действие принимает вид:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[f(\phi, B) - \lambda(\phi - R) + \tilde{\Lambda}_2(\square \phi - \square R) - \tilde{\Lambda}_2(B - \square R) \right]. \quad (4.6)$$

Раскрывая скобки и изменяя $\tilde{\Lambda}_2$ в соответствии с (4.5), получаем

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [f(\phi, B) - \lambda(\phi - R) - \Lambda_2(B - \square \phi)]. \quad (4.7)$$

Варьирование (4.7) по (λ, Λ_2) приводит к уравнениям ограничений

$$\phi = R, \quad B = \square \phi. \quad (4.8)$$

Подставляя (4.8) обратно в действие (4.7), получаем

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [f(\phi, \square \phi) - \lambda(\phi - R)]. \quad (4.9)$$

Далее вводится новое скалярное поле $\phi = f_B$, (где $f_B = \delta f / \delta B$) и производится переход из картины Йордана в картину Эйнштейна с помощью

конформного преобразования метрики $g_{\mu\nu}^E = \Omega^2(x)g_{\mu\nu}^J$, $\Omega^2(x) = 2\lambda$ и переопределения скалярного поля $\chi = \sqrt{\frac{3}{2}} \ln \lambda$ для его введения в действие в качестве канонического поля. В результате в картине Эйнштейна действие (4.9) принимает вид:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \chi_{,\mu} \chi_{,\nu} - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + \frac{1}{4}e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} (f(\phi, \varphi) - \varphi B(\phi, \varphi)) - \frac{1}{4}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \phi \right]. \quad (4.10)$$

Интеграл действия (4.10) можно рассматривать как трехкомпонентную ККМ с метрикой пространства целей с ненулевыми компонентами

$$h_{11} = 1, \quad h_{23} = h_{32} = \frac{1}{2}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}. \quad (4.11)$$

Потенциал взаимодействия:

$$W(\chi, \phi, \varphi) = \frac{1}{4}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \phi - \frac{1}{4}e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} (f(\phi, \varphi) - \varphi B(\phi, \varphi)). \quad (4.12)$$

Используя введенные обозначения полей, метрики и потенциала, общей формой уравнений кирального поля в метрике ФРУ [126]

$$-h_{CB} \left(\ddot{\phi}^B + 3H\dot{\phi}^B \right) - h_{CB,D} \dot{\phi}^D \dot{\phi}^B + \frac{1}{2}h_{DB,C} \dot{\phi}^D \dot{\phi}^B - W_{,C} = 0, \quad (4.13)$$

записываются уравнения динамики киральных полей

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} + \frac{1}{\sqrt{6}}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \dot{\phi} \dot{\phi} - \frac{1}{2\sqrt{6}}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(\phi - 2e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} [f - \varphi B] \right) = 0, \quad (4.14)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \sqrt{\frac{2}{3}}\dot{\chi}\dot{\phi} + \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} [f_{,\phi} - \varphi B_{,\phi}] \right) = 0, \quad (4.15)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \sqrt{\frac{2}{3}}\dot{\chi}\dot{\phi} - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} [f_{,\varphi} - B - \varphi B_{,\varphi}] = 0. \quad (4.16)$$

Уравнения космологической динамики принимают вид:

$$3H^2 = \frac{1}{2}\dot{\chi}^2 + \frac{1}{2}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \dot{\phi} \dot{\phi} + \frac{1}{4}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \phi - \frac{1}{4}e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} (f(\phi, \varphi) - \varphi B(\phi, \varphi)), \quad (4.17)$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}\dot{\chi}^2 - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \dot{\phi} \dot{\phi}. \quad (4.18)$$

Отметим, что приведенные выше уравнения можно свести к уравнениям в режиме медленного скатывания.

Модифицированная гравитация вида $f(R, \square R)$ эквивалентна ККМ с тремя скалярными полями, где динамика и взаимодействие этих полей полностью определяются выбором функции f и её производных, а также потенциалом W . Это позволяет использовать развитые методы анализа многополевых космологических моделей для поиска точных и приближённых решений и исследования космологической динамики.

4.2 Условия режима медленного скатывания

Применяя условия режима медленного скатывания:

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi), \quad \dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi), \quad \dot{\chi}^2 \ll V(\chi), \quad (4.19)$$

$$|\ddot{\phi}| \ll 3H|\dot{\phi}|, \quad |\ddot{\varphi}| \ll 3H|\dot{\varphi}|, \quad |\ddot{\chi}| \ll 3H|\dot{\chi}| \quad (4.20)$$

уравнения (4.14)–(4.16) преобразуются к виду:

$$3H\dot{\chi} - \frac{1}{2\sqrt{6}}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(\phi - 2e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} [f - \varphi B] \right) = 0, \quad (4.21)$$

$$3H\dot{\phi} + \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} [f, \phi - \varphi B, \phi] \right) = 0, \quad (4.22)$$

$$3H\dot{\varphi} - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} [f, \varphi - B - \varphi B, \varphi] = 0. \quad (4.23)$$

Уравнения (4.17)–(4.18) принимают вид

$$3H^2 = \frac{1}{4}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}\phi - \frac{1}{4}e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} (f(\phi, \varphi) - \varphi B(\phi, \varphi)), \quad (4.24)$$

$$\dot{H} = 0. \quad (4.25)$$

Из (4.25) следует, что параметр Хаббла является постоянной величиной $H = H_* = const$. Затем рассчитывается вид скалярных полей $\phi = \phi_* = const$, $\varphi = \varphi_* = const$. Из (4.24) находится соотношение

$$(f(\phi, \varphi) - \varphi B(\phi, \varphi)) = e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(\phi_* - 12H_*^2 e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \right). \quad (4.26)$$

Интегрируя (4.21), определяется вид поля χ

$$\chi = \sqrt{\frac{3}{2}} \ln \left(e^{\frac{4H_*^2}{3}t} + \frac{1}{24H_*^2} \right). \quad (4.27)$$

С помощью этого уравнения (4.26) сводится к

$$(f(\phi, \varphi) - \varphi B(\phi, \varphi)) = \left(e^{\frac{4H_*^2}{3}t} + \frac{1}{24H_*^2} \right) \left(\phi_* - 12H_*^2 \left(e^{\frac{4H_*^2}{3}t} + \frac{1}{24H_*^2} \right) \right). \quad (4.28)$$

Потенциал (5.32) для этого решения в режиме медленного скатывания является постоянной величиной

$$W = 3H_*^2. \quad (4.29)$$

Таким образом, обнаруживается существенное отличие от инфляции Фридмана, где $H = const$ приводит к $W = const$, $\phi = const$. В данном случае одно из полей для модели (4.10) является динамическим.

4.3 Дополнительное материальное поле и космологические решения

В данном разделе введение дополнительного поля в ККМ $f(R, \square R)$ -гравитации обусловлено определёнными этапами эволюции Вселенной и для достижения следующих целей:

1. Упрощение уравнений высшего порядка. Исходные уравнения $f(R, \square R)$ -гравитации содержат производные 6-го порядка от масштабного фактора $a(t)$. Дополнительное скалярное поле ψ позволяет понизить порядок уравнений до 2-го, преобразуя систему в ККМ с двумя взаимодействующими полями.

2. Моделирование сложной динамики. Дополнительное поле вводится для описания взаимодействия инфлатона с другими компонентами ранней Вселенной; эффектов, аналогичных тёмной энергии; переходных процессов между инфляцией и последующими фазами.

Решения с дополнительным материальным полем описывают раннюю инфляцию, где поле ψ генерирует дополнительные слагаемые, необходимые для реализации сценариев медленного скатывания, а потенциал взаимодействия полей $W(\phi, \psi)$ моделирует динамику расширения, согласованную с наблюдаемыми спектральными параметрами (например, спектральным индексом n_s).

В решениях подобных квази-де Ситтера дополнительное поле обеспечивает плавный выход из инфляции, имитируя распад инфлатона в реликтовые частицы.

Для потенциалов пропорциональных квадрату скалярного поля решения описывают эпоху доминирования тёмной энергии, где дополнительное поле действует как вспомогательное поле, модифицирующее уравнение состояния ($\omega \approx -1$). Постоянный потенциал соответствует инфляции де Ситтера с постоянным параметром Хаббла, где дополнительное поле поддерживает экспоненциальное расширение. Нулевой потенциал описывает степенную инфляцию, характерную для хаотических моделей с большими начальными значениями полей.

Таким образом, дополнительное материальное поле вводится для устранения математических сложностей исходных уравнений высшего порядка, для расширения возможностей моделирования ключевых этапов эволюции Вселенной — от инфляции до позднего ускоренного расширения. Его роль заключается в генерации реалистичных сценариев динамики, согласующихся с наблюдательной космологией.

Для построения космологических решений с дополнительным материальным полем рассматривается зависимость между функциями от скалярных полей:

$$f - \varphi B = \phi e^{\sqrt{2/3}\chi}. \quad (4.30)$$

В этом случае потенциал обращается в ноль $W = 0$, а динамические уравнения (4.14)–(4.16) для ККМ с дополнительным материальным полем принимают следующий вид:

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} + \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\dot{\phi}\dot{\phi} + \frac{1}{2}\dot{\phi} \right) e^{-\sqrt{2/3}\chi} = 0, \quad (4.31)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \sqrt{\frac{2}{3}}\dot{\chi}\dot{\phi} = 0, \quad (4.32)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \sqrt{\frac{2}{3}}\dot{\chi}\dot{\phi} = 0. \quad (4.33)$$

В уравнениях гравитационного поля (4.17)–(4.18) добавляется плотность и давление материи

$$3H^2 = \rho_m + \frac{1}{2}\dot{\chi}^2 + \frac{1}{2}e^{-\sqrt{2/3}\chi}\dot{\phi}\dot{\phi}, \quad (4.34)$$

$$3H^2 + 2\dot{H} = -\frac{1}{2}\dot{\chi}^2 - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{2/3}\chi}\dot{\phi}\dot{\phi} - p_m, \quad (4.35)$$

для которых учтено уравнение непрерывности

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m) = 0. \quad (4.36)$$

При отсутствии материального поля $\rho_m = 0$, $p_m = 0$, дополнительно полагая $\phi = 0$ и $H(t) = 1/3t$, что соответствует предельно жесткому уравнению состояния вещества, находится точное решение:

$$f(0, \varphi) = \varphi B(0, \varphi), \quad (4.37)$$

$$\chi(t) = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \ln(t) + c_1, \quad (4.38)$$

$$\varphi(t) = c_2 \exp \left[\pm \frac{2}{3} \left(\ln(t) - \sqrt{\frac{3}{2}} c_1 \right) \right] + c_3, \quad (4.39)$$

где c_1 , c_2 и c_3 – константы интегрирования.

Таким образом, полученное решение соответствует расширению Вселенной по закону $a(t) \propto t^{1/3}$, которое обусловлено исключительно эволюцией киральных полей φ и χ .

Отметим, что это решение может быть определено из общих уравнений (4.14)–(4.18) с помощью другого анзаца, а именно, $f - \varphi B = \phi$ и $\phi = 0$. $\varphi = c_2 t + c_3$, которое соответствует стационарной Вселенной.

Теперь рассмотрим космологические модели с ненулевым дополнительным материальным полем (полями), которые рассматриваются как идеальная баротропная жидкость.

При $\phi = 0$ находится два класса точных решений. Первое соответствует $\chi = const$

$$\rho_m = 3H^2, \quad (4.40)$$

$$p_m = -3H^2 - 2\dot{H}, \quad (4.41)$$

$$\varphi(t) = c_1 \int a^{-3} dt + c_2, \quad (4.42)$$

где $a = a(t)$ – масштабный фактор.

Второй класс решений для любого поля $\chi \neq const$ может быть представлен следующим образом:

$$H(t) = -\frac{1}{3} \frac{\ddot{\chi}}{\dot{\chi}}, \quad a(t) = c_3 \dot{\chi}^{-1/3}, \quad \dot{\chi} = c_3 a^{-3}, \quad (4.43)$$

$$\varphi(t) = c_4 \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\chi(t)\right) + c_5, \quad (4.44)$$

$$\rho_m = \frac{1}{3} \left(\frac{\ddot{\chi}}{\dot{\chi}}\right)^2 - \frac{1}{2}\dot{\chi}^2, \quad (4.45)$$

$$p_m = - \left(\frac{\ddot{\chi}}{\dot{\chi}}\right)^2 - \frac{1}{2}\dot{\chi}^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\ddot{\chi}}{\dot{\chi}}\right). \quad (4.46)$$

Таким образом, определяя динамические $H(t)$ или $a(t)$, можно генерировать точные решения первого класса. Точные решения второго класса генерируются с определением динамических $H(t)$ (или $a(t)$) или эволюции скалярного поля $\chi(t)$.

Первый класс решений основан на задании эволюции масштабного фактора $a(t)$ или параметра Хаббла $H(t)$. Рассмотрим степенную эволюцию масштабного фактора:

$$a(t) = a_* t^m, \quad H(t) = \frac{m}{t}, \quad (4.47)$$

где $m > 0$ — постоянная, определяющая скорость расширения, для которой киральные поля принимаю вид:

$$\phi(t) = \sqrt{6} \ln t + \phi_0, \quad (4.48)$$

$$\chi(t) = \chi_0 + \chi_1 t^{1-m}, \quad (4.49)$$

где χ_0, χ_1 — константы интегрирования. Потенциал:

$$W(\phi, \chi) = W_0 \exp\left(-\sqrt{23}(\phi - \phi_0)\right). \quad (4.50)$$

4.4 Свойства дополнительного материального поля для расширения квази-де Ситтера

Теперь обратим внимание на характеристики дополнительного материального поля в контексте решений, выведенных из параметра состояния $w = p_m/\rho_m$.

Для решений (4.40)–(4.41) уравнение состояния принимает вид

$$w = -1 - \frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (4.51)$$

что соответствует случаю обычного канонического скалярного поля.

Расширение квази-де Ситтера $H \simeq const$ соответствует вакуумоподобному состоянию этого поля $w \simeq -1$.

Для решений (4.43)–(4.46) имеется

$$w = -\frac{4\dot{H} + 6H^2 + (c_3/a)^6}{6H^2 - (c_3/a)^6}. \quad (4.52)$$

Таким образом, для расширения квази-де Ситтера $H \simeq const$ параметр $w \simeq -1$ для $6H^2 \gg (c_3/a)^6$ и $w \simeq 1$ для $6H^2 \ll (c_3/a)^6$. Ускоренное расширение Вселенной может быть обусловлено разнообразными типами материальных полей – от вакуумоподобных до исключительно жестких – в рамках данной модификации теории гравитации Эйнштейна.

Важно отметить, что эволюция параметра состояния материального поля может быть восстановлена в соответствии с заданной динамикой расширения Вселенной $a = a(t)$, опираясь на выражение (4.52).

4.5 Построение однополевой киральной космологической модели

Для вычисления спектральных космологических параметров, включая спектр мощности, спектральные индексы и тензорно-скалярное отношение, необходимо преобразовать модель с тремя киральными полями к однополевой модели при линейной зависимости между соответствующими полями:

$$\phi(t) = k_\phi \chi(t), \quad \varphi(t) = k_\varphi \chi, \quad k_\phi = const, \quad k_\varphi = const. \quad (4.53)$$

Действие (4.10) с учетом преобразований (3.59) сводится к следующему

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \chi_{,\mu} \chi_{,\nu} \left(1 + e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} k_\phi k_\varphi \right) + \frac{1}{4} e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} (f(\chi) - k_\varphi \chi B(\chi)) - \frac{1}{4} e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} k_\phi \chi \right]. \quad (4.54)$$

Отметим, что переход к новому каноническому полю

$$\Psi = \int \left(1 + e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \right)^{1/2} d\chi \quad (4.55)$$

не имеет перспективы из-за сложной зависимости Ψ от χ :

$$\Psi = \frac{1}{x} \left[\sqrt{\frac{1+x}{x}} \left(x \ln(1 + 2x + 2\sqrt{x(1+x)}) \right) - x \ln 2 - 2\sqrt{x(1+x)} \right], \quad (4.56)$$

где $x = e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}$.

Варьируя действие (4.10) по метрике и по полю выводятся уравнения гравитационного и скалярного полей. Используя метрику ФРУ, записываются уравнения гравитационного поля для модели (4.54):

$$3H^2 = \frac{1}{2} \left(1 + e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \right) k_\phi k_\phi \dot{\chi}^2 + W(\chi), \quad (4.57)$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2} \left(1 + e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \right) k_\phi k_\phi \dot{\chi}^2. \quad (4.58)$$

Уравнение скалярного поля имеет следующий вид

$$3H\omega\dot{\chi} + \partial_t(\omega\dot{\chi}) - \frac{1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial \chi} \dot{\chi}^2 + \frac{\partial W}{\partial \chi} = 0, \quad (4.59)$$

где

$$\omega = \left(1 + e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \right) k_\phi k_\phi. \quad (4.60)$$

Производя подстановку ω из (4.60) и выполняя преобразования, уравнения (4.57)–(4.59) сводятся к следующим:

$$3H^2 = \frac{1}{2} \gamma \omega \dot{\chi}^2 + W(\chi), \quad (4.61)$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2} \gamma \omega \dot{\chi}^2, \quad (4.62)$$

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \omega}{\partial \chi} \dot{\chi}^2 + \frac{1}{\omega} \frac{\partial W}{\partial \chi} = 0. \quad (4.63)$$

Здесь $\gamma = 1$ для канонического и $\gamma = -1$ для фантомного скалярного поля χ .

Подставляя (3.59) в (5.32), записывается преобразованный потенциал в следующем виде:

$$W = \frac{1}{4} e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(k_\phi \chi - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} (f(\chi) - k_\phi \chi B(\chi)) \right). \quad (4.64)$$

Производная потенциала по полю χ потребуется для дальнейших вычислений. Она равна

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \chi} = & \frac{1}{4} e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left[2\sqrt{\frac{2}{3}} (f(\chi) - k_\phi \chi B(\chi)) - \right. \\ & \left. - \left(\frac{\partial f(\chi)}{\partial \chi} - k_\phi B(\chi) - k_\phi \chi \frac{\partial B(\chi)}{\partial \chi} \right) + e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(k_\phi - \sqrt{\frac{2}{3}} k_\phi \chi \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.65)$$

4.6 Космологическая динамика при заданной форме потенциала скалярного поля

1. Рассмотрим космологические решения при потенциале, равном нулю $W(\chi) = 0$, и специальной форме функции f от скалярного поля χ , которая следует из условия:

$$f(\chi) = k_\phi \chi e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} + k_\phi B(\chi). \quad (4.66)$$

Последовательно используя (4.61) и (4.62) получаем

$$3H^2 + \dot{H} = W(\chi) = 0, \quad (4.67)$$

откуда определяется параметр Хаббла

$$H = \frac{1}{3(t - t_*)} \quad (4.68)$$

и масштабный фактор

$$a(t) = a_0(t - t_*)^{1/3}. \quad (4.69)$$

Подстановка $H(t)$ в уравнение поля (4.62) и интегрирование полученного уравнения дает выражение, определяющее решение для поля χ :

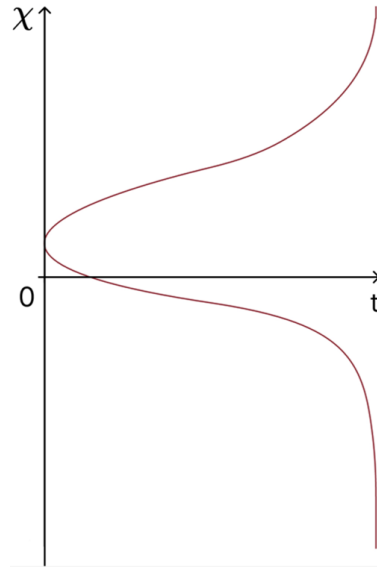
$$\frac{1}{4}\sqrt{3k_\phi k_\phi} \left[2\sqrt{1 + e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}} - \ln \left(\frac{\sqrt{1 + e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}} + 1}{\sqrt{1 + e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}} - 1}} \right) \right] = \sqrt{t} + const. \quad (4.70)$$

Невозможно явно выразить поле χ как функцию от t , но можно графически представить зависимость $\chi(t)$ при $k_\phi = 1/3$, $k_\phi = 16$, $c = 0$ (см. Рисунок 4.1)

2. Рассмотрим космологические решения при $W = W_* = const$. Используя (4.64), находится ключевое соотношение

$$(f(\chi) - k_\phi \chi B(\chi)) = k_\phi \chi e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} - 4W_* e^{2\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}. \quad (4.71)$$

Это означает, что когда определяется χ как функция от времени, то определяется и соотношение между модельными функциями $f(\chi)$ и $B(\chi)$, которые включают W_* .

Рисунок 4.1 — Зависимость $\chi(t)$

Фиксируя $W = W_* = const$, производная оказывается равной нулю:

$$\frac{1}{4}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left[2\sqrt{\frac{2}{3}}(f(\chi) - k_\phi\chi B(\chi)) - \left(\frac{\partial f(\chi)}{\partial \chi} - k_\phi B(\chi) - k_\phi\chi \frac{\partial B(\chi)}{\partial \chi} \right) + \right. \\ \left. + k_\phi e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\chi \right) \right] = 0. \quad (4.72)$$

Вместе с (4.71) это ограничивает класс моделей.

Решение для параметра Хаббла определяется из уравнения

$$3H^2 + \dot{H} = W_*. \quad (4.73)$$

Возможны следующие космологические решения.

1) Экспоненциальная эволюция масштабного фактора

$$H = H_* = const, \quad a(t) = a_0 e^{H_* t}, \quad W_* = 3H_*^2, \quad (4.74)$$

где a_0 — масштабный фактор в момент времени $t = 0$.

2) Решение, определяемое гиперболическими функциями

$$H(t) = \sqrt{\frac{W_*}{3}} \tanh \left(\sqrt{3W_*}(t - t_*) \right), \quad a(t) = a_0 \cosh^{1/3} \left(\sqrt{3W_*}(t - t_*) \right). \quad (4.75)$$

где $\gamma = -1$, и

$$H(t) = \sqrt{\frac{W_*}{3}} \coth \left(\sqrt{3W_*(t - t_*)} \right), \quad a(t) = a_0 \sinh^{1/3} \left(\sqrt{3W_*(t - t_*)} \right), \quad (4.76)$$

где $\gamma = 1$.

3) Решение, определяемое тригонометрическими функциями

$$H(t) = -\sqrt{\frac{W_*}{3}} \operatorname{tg} \left(\sqrt{3W_*(t - t_*)} \right), \quad a(t) = a_0 \cos^{1/3} \left(\sqrt{3W_*(t - t_*)} \right), \quad (4.77)$$

где $\gamma = 1$.

Решение (4.77) может быть представлено в другой форме:

$$H(t) = \sqrt{\frac{W_*}{3}} \operatorname{ctg} \left(\sqrt{3W_*(t - t_*)} \right), \quad a(t) = a_0 \sin^{1/3} \left(\sqrt{3W_*(t - t_*)} \right), \quad (4.78)$$

где $\gamma = 1$.

Отметим, что для решения (4.75), зависимость χ от времени t можно найти из уравнения

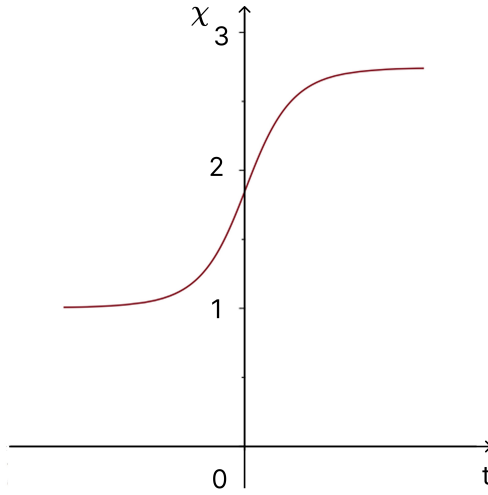
$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \sqrt{-k_\phi k_\phi} \left[-2\sqrt{1 + e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}} + \ln \left(\frac{\sqrt{1 + e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}} + 1}{\sqrt{1 + e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}} - 1}} \right) \right] = \\ = \arctan \left(\exp[\sqrt{3W_*(t - t_*)}] \right) + \text{const.} \end{aligned} \quad (4.79)$$

В этом случае не удастся явно выразить поле χ как функцию от t , но можно графически представить зависимость $\chi(t)$ при $k_\phi = -1/9$, $k_\phi = 16$, $c = 0$ (см. Рисунок 4.2)

Решения (4.75)–(4.78) не в полной мере согласуются с имеющимися наблюдательными данными и представляют трудности для экспериментальной проверки. В связи с этим возникает необходимость учитывать квантовые флуктуации на ранних этапах эволюции Вселенной, например, посредством включения слагаемого Гаусса–Бонне в действие модели (4.1). Альтернативным подходом является рассмотрение решений с непостоянным потенциалом $W(\phi) \neq \text{const}$. Следующий раздел посвящён поиску нового решения с переменным потенциалом.

3. Решения для потенциала в виде полного квадрата.

Решения модели строятся таким образом, чтобы функций f и B изначально являлись произвольными функциями, а потенциал можно было представить

Рисунок 4.2 — Зависимость $\chi(t)$

в виде некоторого выражения в квадрате. Для этого вводится следующая зависимость функций f и B :

$$f(\chi) = e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} f_1(\chi), \quad B(\chi) = e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} k_\phi \chi B_1(\chi). \quad (4.80)$$

Цепочка преобразований показывает, как потенциал сводится к нужному путём следующих преобразований:

$$\begin{aligned} k_\phi \chi - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} (f(\chi) - k_\phi \chi B(\chi)) &= k_\phi \chi - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} (f_1 - k_\phi \chi B_1) = \\ &= k_\phi \chi - (f_1 - k_\phi \chi B_1), \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$\begin{aligned} k_\phi \chi - (f_1 - k_\phi \chi B_1) &= \\ = \sqrt{k_\phi \chi} - \frac{f_1}{2\sqrt{k_\phi \chi}} \sqrt{k_\phi \chi} + k_\phi \chi B_1 &= \left(\sqrt{k_\phi \chi} - \frac{f_1}{2\sqrt{k_\phi \chi}} \right)^2, \end{aligned} \quad (4.82)$$

что приводит к соотношению между f и B :

$$\left(\frac{f_1}{2\sqrt{k_\phi \chi}} \right)^2 = k_\phi \chi B_1. \quad (4.83)$$

Следовательно, B_1 может быть определена через функцию f_1 и поле χ следующим образом:

$$B_1 = \frac{f_1^2}{4k_\phi k_\phi \chi^2}. \quad (4.84)$$

Таким образом, потенциал принимает вид:

$$W = \frac{1}{4} e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(\sqrt{k_\phi \chi} - \frac{f_1}{2\sqrt{k_\phi \chi}} \right)^2. \quad (4.85)$$

Данный потенциал обладает следующими ключевыми свойствами: экспоненциальное затухание потенциала при больших значениях поля создаёт "плато", что благоприятно для режима медленного скатывания поля – ключевого условия для продолжительной инфляции; наличие минимума с $W = 0$ позволяет полю стабилизироваться после окончания инфляции, обеспечивая переход к стандартной фазе расширения Вселенной; при $\chi \rightarrow 0$ задаёт бесконечный рост потенциала при малых χ , что препятствует быстрому движению поля в эту область, что может предотвращать преждевременное завершение инфляции. Таким образом, потенциал $W = \chi$ может служить реалистичной моделью инфляционного поля с естественной стабилизацией и подходящими условиями для успешного прохождения инфляционного этапа.

4.6.1 Космологическая динамика в условиях режима медленного скатывания

Стандартные условия для режима медленного скатывания в инфляционной космологии Фрийдмана с каноническим скалярным полем соответствует условиям: $\dot{\chi}^2 \ll 1$, $\ddot{\chi} \ll 1$. В рассматриваемом случае сталкиваемся с дополнительным кинетическим слагаемым как множителем для кинетической компоненты скалярного поля. Поэтому учитываем в динамических уравнениях (4.61)–(4.63) условия $\frac{1}{2}\omega\dot{\chi}^2 \ll W(\chi)$ и $\ddot{\chi} \ll 1$.

Уравнения космологической динамики принимают вид:

$$3H^2 \simeq W, \quad (4.86)$$

$$\dot{H} = \frac{1}{2}\omega\dot{\chi}^2, \quad (4.87)$$

$$3H\omega\dot{\chi} + \frac{\partial W}{\partial \chi} \simeq 0. \quad (4.88)$$

Используя (4.86), рассчитывается параметр Хаббла H :

$$H = \sqrt{\frac{W}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(\sqrt{k_\phi \chi} - \frac{f_1}{2\sqrt{k_\phi \chi}} \right). \quad (4.89)$$

Потенциал (4.85) может быть представлен в следующем виде:

$$W = \frac{1}{4} e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(k_\phi \chi - f_1 + \frac{k_\phi}{4k_\phi} f_1^2 \right), \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \chi} = & -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{3}} e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(k_\phi \chi - f_1 + \frac{k_\phi}{4k_\phi} f_1^2 \right) + \\ & + \frac{1}{4} e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(k_\phi - f_{1,\chi} + \frac{k_\phi}{2k_\phi} f_1 f_{1,\chi} \right). \end{aligned} \quad (4.91)$$

Подстановка (4.89) в уравнение (4.88) даёт

$$2\sqrt{3} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(\sqrt{k_\phi \chi} - \frac{f_1}{2\sqrt{k_\phi \chi}} \right) (1 + e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}) k_\phi k_\phi \dot{\chi} + \quad (4.92)$$

$$+ e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \left(k_\phi \chi - f_1 + \frac{k_\phi}{4k_\phi} f_1^2 \right) + k_\phi - f_{1,\chi} + \frac{k_\phi}{2k_\phi} f_1 f_{1,\chi} \right) = 0. \quad (4.93)$$

Таким образом, записывается общее решение в квадратурах:

$$t = - \int \left[\frac{4\sqrt{3} \left(\sqrt{k_\phi \chi} - \frac{f_1}{2\sqrt{k_\phi \chi}} \right) \cosh \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \chi \right) k_\phi k_\phi}{-\sqrt{\frac{2}{3}} \left(k_\phi \chi - f_1 + \frac{k_\phi}{4k_\phi} f_1^2 \right) + k_\phi - f_{1,\chi} + \frac{k_\phi}{2k_\phi} f_1 f_{1,\chi}} \right] d\chi. \quad (4.94)$$

Зная функцию f_1 , можно рассмотреть интеграл (4.94).

Возвращаясь к точному уравнению (4.62), записывается параметр Хаббла в виде

$$H = \frac{\sqrt{W}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(\sqrt{k_\phi \chi} - \frac{f_1}{2\sqrt{k_\phi \chi}} \right). \quad (4.95)$$

Производная по времени определяется следующим образом:

$$\dot{H} = \frac{1}{4\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left[-\sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{2k_\phi \chi - f_1}{2\sqrt{k_\phi \chi}} \right) + \left(\frac{2k_\phi \chi - 2f_{1,\chi}\chi + f_1}{2\chi\sqrt{k_\phi \chi}} \right) \right] \dot{\chi}. \quad (4.96)$$

Подставляя результат в (4.62), определяется вид поля χ

$$\dot{\chi} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}}{2\sqrt{3} (1 + e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}) k_\phi k_\phi} \left[\frac{f_{1,\chi} - \left(\frac{1}{2\chi} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \right) f_1 + k_\phi \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\chi - 1 \right)}{\sqrt{k_\phi \chi}} \right]. \quad (4.97)$$

Случай А. Предполагая

$$1 + e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} = \left[\sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{2k_\phi\chi - f_1}{2\sqrt{k_\phi\chi}} \right) - \left(\frac{2k_\phi\chi - 2f_{1,\chi}\chi + f_1}{2\chi\sqrt{k_\phi\chi}} \right) \right], \quad (4.98)$$

определяется поле χ из уравнения

$$\dot{\chi} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}}{2\sqrt{3}k_\phi k_\varphi}. \quad (4.99)$$

В результате:

$$\chi = \sqrt{6} \ln \left[\frac{\sqrt{2}(t - t_*)}{12k_\phi k_\varphi} \right]. \quad (4.100)$$

Чтобы найти f_1 из (4.98) в качестве функции от χ , уравнение (4.98) сводится к виду:

$$f_{1,x} - f_1 \left(\frac{1+x}{2x} \right) + \sqrt{\frac{3}{2}}k_\phi x - \sqrt{\frac{3}{2}}k_\phi - \sqrt[4]{\left(\frac{3}{2}\right)^3} \sqrt{k_\phi x} (1 + e^{-x}) = 0, \quad (4.101)$$

решение которого:

$$f_1(x) = \sqrt{6}k_\phi x - (54)^{1/4} \sqrt{k_\phi x} \left[\frac{1}{3}e^{-x} + 1 - \frac{4}{3}e^{x/2} - C_1, e^{x/2} \right], \quad (4.102)$$

где $x = \sqrt{\frac{2}{3}}\chi$.

Таким образом, из (4.95) определяется параметр Хаббла:

$$H(t) = \frac{\sqrt{2}}{12} \left[(s(t - t_*))^{-3} + (s(t - t_*))^{-1} - 4 - 3C_1 \right], \quad s = \frac{\sqrt{2}}{12k_\phi k_\varphi}. \quad (4.103)$$

Случай В. Предполагая

$$\left[\sqrt{\frac{2}{3}} \left(k_\phi\chi - \frac{1}{2}f_1 \right) - \left(\frac{1}{2} - f_{1,\chi} + \frac{f_1}{\chi} \right) \right] = A\sqrt{\chi}, \quad A = const, \quad (4.104)$$

уравнение для f_1 сводится к

$$f_{1,x} - f_1 \left(\frac{1+x}{2x} \right) + \sqrt{\frac{3}{2}}k_\phi x - \sqrt{\frac{3}{2}}k_\phi - A\sqrt[4]{\left(\frac{3}{2}\right)^3} \sqrt{x} = 0, \quad (4.105)$$

решение которого для $f_1(\chi)$ записывается в виде:

$$f_1(x) = -xk_\phi\sqrt{3\pi}e^{x/2}erf\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) + \sqrt{6}k_\phi x + C_1\sqrt{x}e^{x/2}. \quad (4.106)$$

Решение для поля χ

$$\chi = \sqrt{6} \sinh^{-1} \left[\frac{t - t_*}{12\sqrt{2}} \right]. \quad (4.107)$$

Таким образом, из (4.95) определяется параметр Хаббла:

$$H(x) = \frac{\sqrt[4]{6}}{2} \sqrt{k_\phi x} \left(\sqrt{2} - \sqrt{\pi} e^{x/2} \operatorname{erf}(x/2) \right) + \frac{C_1}{2\sqrt{k_\phi}} \sqrt[4]{\frac{2}{3}}. \quad (4.108)$$

4.6.2 Космологическая динамика на основе метода суперпотенциала

Определяя суперпотенциал в виде:

$$\begin{aligned} S_W &= W(\chi) + \frac{1}{2} \omega \dot{\chi}^2 = \\ &= \frac{1}{4} e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(k_\phi \chi - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} (f(\chi) - k_\phi \chi B(\chi)) \right) + \frac{1}{2} U(\chi)^2, \end{aligned} \quad (4.109)$$

где $U^2(\chi) = \omega \dot{\chi}^2$, потенциал U принимает вид:

$$U(\chi) = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{k_\phi}} e^{-\sqrt{\frac{3}{2}}\chi} (f(\chi) - k_\phi \chi B(\chi)) (\chi)^{-1/2}, \quad (4.110)$$

суперпотенциал S_W преобразуется к виду:

$$S_W = 2e^{\frac{2}{3}\chi} \left[\sqrt{\frac{k_\phi}{2}} e^{-\sqrt{\frac{3}{2}}\chi} \chi^{1/2} + U(\chi) \right]^2. \quad (4.111)$$

Зная $U = \sqrt{\omega} \dot{\chi}$, определяется χ из (4.110)

$$\chi = \left(\frac{3}{2} K_1 \right)^{2/3} (t - t_*)^{2/3}, \quad (4.112)$$

принимая во внимание особый вид связи между функциями $f(\chi)$ и $B(\chi)$:

$$f(\chi) - k_\phi \chi B(\chi) = e^{-\sqrt{\frac{3}{2}}\chi} \left(1 + e^{\sqrt{\frac{3}{2}}\chi} \right)^{-1}, \quad (4.113)$$

в (4.112)

$$K_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{k_\phi k_\phi}}, \quad (4.114)$$

тогда параметр Хаббла равен

$$H(\chi(t)) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\sqrt{\frac{k_\phi}{2}} \sqrt{\chi} + e^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} U(\chi) \right], \quad (4.115)$$

потенциал принимает вид:

$$U(\chi) = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{k_\phi}} e^{-\frac{5}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \chi^{-1/2} \left(1 + e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \right)^{-1/2}. \quad (4.116)$$

4.7 Выводы к Главе 4

Глава 4 посвящена изучению ККМ, соответствующей МТГ вида $f(R, \square R)$. Данная модель расширяет ранее рассмотренные модели с кинетической компонентой от скалярной кривизны и способствует более глубокому пониманию структурной и динамической сложности космологической эволюции.

Путём введения множителей Лагранжа и применения вариационного принципа модель $f(R, \square R)$ была представлена в виде эквивалентного действия в картине Эйнштейна с тремя киральными полями, взаимодействующими посредством заданной киральной метрики и потенциала взаимодействия. Такая формулировка позволяет понизить порядок исходных уравнений до второго порядка, существенно упрощая их анализ, и обеспечивает использование богатого математического аппарата многополевых киральных моделей.

В Главе 4 подробно рассмотрены условия режима медленного скатывания для трёхкомпонентной киральной модели, которые приводят к упрощённым уравнениям динамики полей и позволяют описать длительную инфляционную фазу с почти постоянным параметром Хаббла. Установлено, что данный режим характеризуется слабыми производными скалярных полей и позволяет получить решения с постоянным и нулевым потенциалом, реализующие различные сценарии инфляционной эволюции.

Для большей физической реалистичности и моделирования взаимодействия геометрических и материальных компонентов во Вселенной введено дополнительное материальное скалярное поле, рассматриваемое как идеальная баротропная жидкость. Показано, что наличие этого поля расширяет класс возможных точных решений, включая две большие группы, сгенерированные

либо посредством задания масштабного фактора, либо через задание динамики скалярного поля, и обеспечивает моделирование переходов между различными фазами расширения Вселенной.

Получены новые классы точных решений.

- Для нулевого потенциала $W = 0$ показано, что решение параметра Хаббла принимает степенную форму $H(t) \propto (t - t_*)^{-1}$, а масштабный фактор соответствует степенному расширению $a(t) \propto (t - t_*)^{1/3}$, что соответствует модели с очень жестким уравнением состояния.

- Для постоянного потенциала $W = const$ получены решения с экспоненциальной, гиперболической и тригонометрической зависимостью масштабного фактора, что описывает устойчивые фазы космологической инфляции, её распад и постинфляционное расширение с динамической эволюцией киральных полей.

- Аналитически выражена связь между параметрами модели и кинематическими характеристиками решения, включая роль постоянных интегрирования и функций от времени, задающих поведение поля.

Для облегчения вычисления спектральных параметров и сравнений с наблюдениями предложен переход трёхполевой киральной модели к однополевой с определёнными линейными связями между полями. Представлены преобразования скалярных полей и метрики, приводящие к динамическим уравнениям с модифицированным кинетическим слагаемым и потенциалом. Отмечена невозможность простого канонического приведения к одной из переменных из-за сложной формы метрики.

Применен подход суперпотенциала, позволяющий выразить динамику поля в удобном интегральном виде, что значительно облегчает изучение инфляционной динамики. Установлены общие решения для поля и параметра Хаббла в режиме медленного скатывания с вариационным потенциалом модели, обладающим свойствами, благоприятствующими успешному прохождению инфляционных фаз.

Полученные решения и методы создают эффективный инструментарий для построения многофункциональных и физически реалистичных моделей инфляционной космологии с использованием модифицированной гравитации $f(R, \square R)$. Они обеспечивают основу для дальнейших сравнений теоретических предсказаний с данными космологических наблюдений и для развития новых мультиполевых и киральных подходов в космологии.

По результатам исследования, изложенного в Главе 4, обоснованы следующие положения, выносимые на защиту:

3. Космологические решения в условиях режима медленного скатывания, обеспечивающие раннюю космологическую инфляцию при постоянном потенциале скалярного поля в однополевой киральной космологической модели, редуцированной из киральной модели с тремя киральными полями при линейной зависимости двух полей от третьего, соответствующей $f(R, \square R)$ -гравитации.

4. Космологические решения при экспоненциальной, тригонометрической и гиперболической эволюции масштабного фактора с постоянным потенциалом скалярных полей для киральной космологической модели с тремя киральными полями, соответствующей $f(R, \square R)$ -гравитации.

Глава 5. Киральная космологическая модель $f(R, (\nabla R)^2, \square R)$ -гравитации

В Главе 5 рассматривается $f(R, (\nabla R)^2, \square R)$ -гравитация, преобразованная в картину Эйнштейна со скалярными полями по методу, описанному в работе [31]. Для получения ККМ, которая соответствует $f(R, (\nabla R)^2, \square R)$ -гравитации, вводятся функции $B(\phi, (\nabla\phi)^2, \psi)$ и $f(\phi, (\nabla\phi)^2, \psi)$ определенного вида. На основе общей формы уравнений кирального поля в метрике ФРУ [126] записываются уравнения киральных полей, уравнения космологической динамики. Приводятся космологические и инфляционные решения при заданной форме потенциала киральных полей.

5.1 Киральная космологическая модель $f(R, (\nabla R)^2, \square R)$ -гравитации

Следуя методу, представленному в статье [31], для $f(R, (\nabla R)^2, \square R)$ -гравитации действие принимает вид

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [f(R, (\nabla R)^2, \square R)], \quad (5.1)$$

где R – скалярная кривизна, $(\nabla R)^2 = \nabla_\mu R \nabla^\mu R$, $\square R = \nabla_\mu \nabla^\mu R$ – ковариантные производные. Действие (5.1) преобразовывается в гравитацию Эйнштейна со скалярными полями путем введения множителей Лагранжа $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ и дополнительных независимых скалярных полей ϕ, X, B следующим образом:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [f(\phi, X, B) - \Lambda_1(\phi - R) - \Lambda_2(X - (\nabla R)^2) - \Lambda_3(B - \square R)]. \quad (5.2)$$

$$- \Lambda_1(\phi - R) - \Lambda_2(X - (\nabla R)^2) - \Lambda_3(B - \square R)]. \quad (5.3)$$

Для введения связи между скалярными полями так, что $\phi = R$, $X = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi$, $B = \square \phi$, производится вариация действия (5.3) по полям ϕ, X, B и записываются соответствующие уравнения:

$$F_1 \equiv \frac{df}{d\phi} - \frac{d\Lambda_1}{d\phi}(\phi - R) - \Lambda_1 - \frac{d\Lambda_2}{d\phi}(X - (\nabla R)^2) - \frac{d\Lambda_3}{d\phi}(B - \square R) = 0, \quad (5.4)$$

$$F_2 \equiv \frac{df}{dX} - \frac{d\Lambda_1}{dX}(\phi - R) - \frac{d\Lambda_2}{dX}(X - (\nabla R)^2) - \Lambda_2 - \frac{d\Lambda_3}{dX}(B - \square R) = 0, \quad (5.5)$$

$$F_3 \equiv \frac{df}{dB} - \frac{d\Lambda_1}{dB}(\phi - R) - \frac{d\Lambda_2}{dB}(X - (\nabla R)^2) - \frac{d\Lambda_3}{dB}(B - \square R) - \Lambda_3 = 0. \quad (5.6)$$

Комбинация, связывающая скалярные поля $F_1 d\phi + F_2 dX + F_3 dB$, приводит к уравнению

$$df = (\phi - R)d\Lambda_1 + (X - (\nabla R)^2)d\Lambda_2 + (B - \square R)d\Lambda_3 + \Lambda_1 d\phi + \Lambda_2 dX + \Lambda_3 dB, \quad (5.7)$$

где $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ не являются константами, иначе получалось бы ограничение на вид функциональной зависимости f : $f = \Lambda_1 \phi + \Lambda_2 X + \Lambda_3 B$. Представленная форма, подставленная в (5.1), позволяет рассмотреть частный случай модели с действием

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [\Lambda_1 R + \Lambda_2 (\nabla R)^2 + \Lambda_3 \square R], \quad (5.8)$$

В этом случае устанавливается следующая связь между скалярными полями:

$$\phi = R, \quad X = g^{\mu\nu} \nabla_\mu R \nabla_\nu R, \quad B = \square R. \quad (5.9)$$

Следовательно, множители лагранжа определяются динамически. Для получения уравнений ограничений вместо динамических уравнений, преобразуются множители от $(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ к $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ заменой следующего вида:

$$\lambda_1 = \Lambda_1 - \nabla^\mu [\Lambda_2 \nabla_\mu (\phi + R)] - \square \Lambda_3, \quad \lambda_2 = \Lambda_2, \quad \lambda_3 = \Lambda_3 \quad (5.10)$$

и последующей подстановкой в (5.3) множителей $(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$, зависящих от $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Выполнив указанную процедуру, в лагранжиане действия появляются слагаемые от подстановки Λ_1 .

λ_2 -компонента в лагранжиане $\nabla^\mu [\Lambda_2 \nabla_\mu (\phi + R)] (\phi - R)$ преобразуется следующим образом. Определяя 4-дивергенцию вида

$$\nabla^\mu [[\Lambda_2 \nabla_\mu (\phi + R)] (\phi - R)] = \quad (5.11)$$

$$= \nabla^\mu [\Lambda_2 \nabla_\mu (\phi + R)] (\phi - R) + \Lambda_2 [(\nabla \phi)^2 - (\nabla R)^2], \quad (5.12)$$

заменяя в лагранжиане компоненту вида $\nabla^\mu [\Lambda_2 \nabla_\mu (\phi + R)] (\phi - R)$ на компоненту $-\Lambda_2 [(\nabla \phi)^2 - (\nabla R)^2]$, а также учитывая теорему Гаусса–Стокса, слагаемые лагранжиана, содержащее λ_2 преобразуются к следующему виду: $-\Lambda_2 (X - (\nabla R)^2) + \Lambda_2 [(\nabla \phi)^2 - (\nabla R)^2] = -\Lambda_2 (X - (\nabla \phi)^2)$.

Аналогично, слагаемое, содержащее λ_2 , $\square\Lambda_3(\phi - R)$ представляется в виде:
 $\square\Lambda_3(\phi - R) = \nabla^\mu M_\mu - \Lambda_3(\square\phi - \square R)$, где $M_\mu = \nabla_\mu[\Lambda_3(\phi - R)]$.

После этого слагаемое с λ_3 в лагранжиане принимает вид: $\Lambda_3(\square\phi - \square R) - \Lambda_3(B - \square R) = -\Lambda_3(B - \square\phi)$.

После указанных выше преобразований действие принимает вид:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [f(\phi, X, B) - \lambda_1(\phi - R) - \lambda_2(X - (\nabla\phi)^2) - \lambda_3(B - \square\phi)]. \quad (5.13)$$

Поскольку действие не включает в себя никаких производных от X и B , варьирование действия по этим переменным приводит к уравнениям ограниченный $\frac{df}{dX} = \lambda_2$, $\frac{df}{dB} = \lambda_3$. Для действия (5.13) варьирование по (λ_2, λ_3) приводит к следующим уравнениям

$$X = (\nabla\phi)^2, B = \square\phi. \quad (5.14)$$

Таким образом, действие принимает вид:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [f(\phi, (\nabla\phi)^2), \square\phi) - \lambda_1(\phi - R)]. \quad (5.15)$$

Множитель Лагранжа может быть введен при замене R на ϕ , поскольку все производные от R заменяются производными от ϕ . Итак, можно определить динамику ϕ с помощью слагаемых, отражающих производную от ϕ , и, варьируя действие по ϕ , тогда λ_1 является динамическим полем.

Преобразуем модель (5.15) из картины Йордана в картину Эйнштейна, используя конформное преобразование $g_{\mu\nu}^E = \Omega^2(x)g_{\mu\nu}^J$, $\Omega^2(x) = 2\lambda(x)$. В результате получаем:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}R - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2\lambda^2} g^{\mu\nu} \lambda_{,\mu} \lambda_{,\nu} \right) + \frac{1}{4\lambda^2} f(\phi, (\nabla\phi)^2), \square\phi) - \frac{\phi}{4\lambda} \right]. \quad (5.16)$$

Ясно, что действие (5.16) представлено в картине Эйнштейна.

5.2 Модель с уменьшенным порядком производных по скалярному полю

Для уменьшения порядка производных, присутствующих в слагаемом $\square\phi$, вводятся множители Лагранжа и соответствующие им вспомогательные поля. В частности, действие записывается так:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [f(\phi, (\nabla\phi)^2, B) - \lambda(\phi - R) - \Lambda(B - \square\phi)]. \quad (5.17)$$

Вариация действия (5.17) по переменной B приводит к соотношению

$$\Lambda = \frac{df}{dB} \equiv f_B. \quad (5.18)$$

Это условие исключает Λ из действия (5.17), позволяя выразить его через производную функции f по B . Если при этом выполняется условие $f_{BB} \neq 0$, то выражение для Λ не является постоянной величиной, и можно подставить f_B обратно в действие. Такая заменяющая подстановка однозначна и приводит к исходному соотношению $B = \square\phi$.

Следовательно, если f_B – постоянная, то можно не менять Λ в уравнении выше. В общем случае Λ не является постоянной величиной (иначе условие $B = \square\phi$ не имеет смысла), и значит, строго выполняется $f_{BB} \neq 0$.

При этом удобно ввести новое вспомогательное скалярное поле

$$\psi = f_B \quad (5.19)$$

и рассматривать базовую систему переменных $(g_{\mu\nu}, \lambda, \phi, \psi)$. Преобразование с набора $(g_{\mu\nu}, \lambda, \phi, B)$ в $(g_{\mu\nu}, \lambda, \phi, \psi)$ является локально обратимым именно при условии $f_{BB} \neq 0$.

Рассмотрим это преобразование подробнее. Прежде всего, должны изменить аргументы функции f : $f(\phi, (\nabla\phi)^2, B)$ to $f(\tilde{\phi}, (\tilde{\nabla}\phi)^2, \tilde{\psi})$. Якобиан преобразования

$$\tilde{\phi} = \tilde{\phi}(\phi, (\nabla\phi)^2, B), \quad (5.20)$$

$$(\tilde{\nabla}\phi)^2 = (\tilde{\nabla}\phi)^2(\phi, (\nabla\phi)^2, B), \quad \tilde{\psi} = \tilde{\psi}(\phi, (\nabla\phi)^2, B), \quad (5.21)$$

в условиях $\tilde{\phi} = \phi$, $(\tilde{\nabla}\phi)^2 = (\nabla\phi)^2$, $\tilde{\psi} = \psi$, равно f_{BB} . Поскольку $f_{BB} \neq 0$, приведенное выше преобразование обратимо, что позволяет выразить новые

аргументы следующим образом:

$$\phi = \phi(\tilde{\phi}, (\tilde{\nabla}\phi)^2, \tilde{\psi}) \quad (5.22)$$

$$(\nabla\phi)^2 = (\nabla\phi)^2(\tilde{\phi}, (\tilde{\nabla}\phi)^2, \tilde{\psi}), \quad B = B(\tilde{\phi}, (\tilde{\nabla}\phi)^2, \tilde{\psi}). \quad (5.23)$$

Используя приведенные выше условия, можно записать $B = B(\phi, (\nabla\phi)^2, \psi)$. Для выделения 4-дивергенции

$$\nabla^\mu(\Lambda\nabla_\mu\phi) = (\nabla^\mu\Lambda)\nabla_\mu\phi + \Lambda\Box\phi \quad (5.24)$$

вычитаем и добавляем $(\nabla^\mu\Lambda)\nabla_\mu\phi$ в действии (5.17). Затем используя (5.18), преобразуем действие:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g} [\lambda R - (\nabla^\mu f_B)\nabla_\mu\phi + f(\phi, (\nabla\phi)^2, \psi) - f_B B(\phi, (\nabla\phi)^2, \psi) - \lambda\phi]. \quad (5.25)$$

Эквивалентно, в картине Йордана:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g} [\lambda R - (\nabla^\mu\psi)\nabla_\mu\phi + f(\phi, (\nabla\phi)^2, \psi) - \psi B(\phi, (\nabla\phi)^2, \psi) - \lambda\phi]. \quad (5.26)$$

Действие преобразуется (5.26) из картины Йордана с метрикой $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^J$ в картину Эйнштейна, используя конформное преобразование $g_{\mu\nu}^E = \Omega^2(x) = 2\lambda(x)g_{\mu\nu}^J$.

В результате в картине Эйнштейна действие принимает вид:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g} \left[\frac{R}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \lambda_\mu \lambda^\mu \right) + \frac{1}{4\lambda^2} f(\phi, (\nabla\phi)^2, \psi) - \frac{1}{4\lambda^2} \psi B(\phi, (\nabla\phi)^2, \psi) - \frac{1}{4\lambda} \phi \right], \quad (5.27)$$

где использовалось преобразование скалярного поля $\phi^J = \sqrt{2\lambda}\phi^E$.

В общем случае нельзя представить модель с действием (5.27) как ККМ. Для примера перехода к ККМ выбираем функцию B следующим образом:

$$B(\phi, (\nabla\phi)^2, \psi) = B_1(\phi, \psi) g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + B_2(\phi, \psi) \quad (5.28)$$

и аналогично выбираем функцию f , которая принимает вид

$$f(\phi, (\nabla\phi)^2, \psi) = X(\phi, \psi) g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + f_1(\phi, \psi). \quad (5.29)$$

Подстановка (5.28) и (5.29) в действие (5.27) при замене $\lambda = e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}$, приводит к

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \chi_{,\mu} \chi_{,\nu} - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \psi_{,\nu} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(\psi B_1(\phi, \psi) - \frac{1}{2}X(\phi, \psi) \right) g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \right. \\ \left. - \frac{1}{4}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(\phi + e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} (\psi B_2(\phi, \psi) - f_1(\phi, \psi)) \right) \right]. \quad (5.30)$$

Таким образом, действие (5.30) может быть описано трехкомпонентной КСГМ с метрикой пространства целей с ненулевыми компонентами

$$h_{11} = 1, \quad h_{22} = e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(\psi B_1(\phi, \psi) - \frac{1}{2}X(\phi, \psi) \right), \quad h_{23} = -\frac{1}{2}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \quad (5.31)$$

и потенциалом взаимодействия

$$W(\chi, \phi, \psi) = \frac{1}{4} \left(e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \phi + e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} (\psi B_2(\phi, \psi) - f_1(\phi, \psi)) \right). \quad (5.32)$$

5.3 Уравнения космологической динамики

Используя общую форму уравнений кирального поля в метрике ФРУ, представленной в [126]

$$-h_{CB} \left(\ddot{\phi}^B + 3H\dot{\phi}^B \right) - h_{CB,D} \dot{\phi}^D \dot{\phi}^B + \frac{1}{2}h_{DB,C} \dot{\phi}^D \dot{\phi}^B - W_{,C} = 0 \quad (5.33)$$

и обозначения полей, метрики и потенциала, как в предыдущем разделе, уравнения киральных полей принимают вид:

$$-\ddot{\chi} - 3H\dot{\chi} - \sqrt{\frac{2}{3}}e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(\psi B_1(\phi, \psi) - \frac{1}{2}X(\phi, \psi) \right) \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \dot{\phi}\dot{\psi} - W_{,\chi} = 0, \quad (5.34)$$

$$-e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(\psi B_1(\phi, \psi) - \frac{1}{2}X(\phi, \psi) \right) \left(\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} \right) + \frac{1}{2} \left(\ddot{\psi} + 3H\dot{\psi} \right) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\dot{\chi}\dot{\phi} - \\ - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(\psi B_{1,\phi} - \frac{1}{2}X_{,\phi} \right) \dot{\phi}^2 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(B_1 + \psi B_{1,\psi} - \frac{1}{2}X_{,\psi} \right) \dot{\phi}\dot{\psi} - e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} W_{,\phi} = 0, \quad (5.35)$$

$$-\frac{1}{2} \left(\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\chi} \dot{\phi} + \frac{1}{2} e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(B_1 + \psi B_{1,\psi} - \frac{1}{2} X_{,\psi} \right) \dot{\phi}^2 - e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} W_{,\psi} = 0. \quad (5.36)$$

Уравнения космологической динамики таковы:

$$3H^2 = \gamma \left[\frac{1}{2} \dot{\chi}^2 + \frac{1}{2} e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(\psi B_1 - \frac{1}{2} X \right) \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \dot{\phi} \dot{\psi} \right] + W, \quad (5.37)$$

$$\dot{H} = \gamma \left[-\frac{1}{2} \dot{\chi}^2 - \frac{1}{2} e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(\psi B_1 - \frac{1}{2} X \right) \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \dot{\phi} \dot{\psi} \right]. \quad (5.38)$$

Здесь вводится параметр γ , чтобы учесть фантомные киральные поля.

5.4 Космологические и инфляционные решения при заданной форме потенциала киральных полей

Предположение $W = 0$ дает решение:

$$H = \frac{1}{3} (t - t_*)^{-1}, \quad t_* = const. \quad (5.39)$$

Примером решения уравнений киральных полей является

$$\phi = 0, \quad f_1(\phi, \psi) - \psi B_2(\phi, \psi) = 0, \quad (5.40)$$

$$\chi = c_\chi \ln(t - t_*) + \chi_*, \quad \psi = c_\psi \ln(t - t_*) + \psi_*, \quad (5.41)$$

где c_χ , c_ψ , χ_* , ψ_* – это некоторые константы. Отметим, что приведённое выше решение справедливо только при выполнении соотношения $f_1(\phi, \psi) = \psi B_2(\phi, \psi)$ для функций модели. Другие функции $B_1(\phi, \psi)$ и $X(\phi, \psi)$ не имеют никаких ограничений, они произвольные. Напомним, что полученные решения не связаны с решениями в картине Йордана.

Установим (дополнительно к $W = 0$) $h_{22} = 0$, т.е.

$$h_{22} = e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \left(\psi B_1(\phi, \psi) - \frac{1}{2} X(\phi, \psi) \right) = 0. \quad (5.42)$$

Динамические уравнения (5.34)–(5.36) с $\psi B_1(\phi, \psi) - \frac{1}{2} X(\phi, \psi) = 0$ принимают вид:

$$-\ddot{\chi} - 3H\dot{\chi} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} \dot{\phi} \dot{\psi} = 0, \quad (5.43)$$

$$\frac{1}{2} \left(\ddot{\psi} + 3H\dot{\psi} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\chi} \dot{\phi} = 0, \quad (5.44)$$

$$-\frac{1}{2} \left(\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\chi} \dot{\phi} = 0. \quad (5.45)$$

Заметим, что параметр Хаббла $H(t)$ известен из (5.39). Вычитая (5.45) из (5.44), получаем:

$$\left(\ddot{\psi} + 3H\dot{\psi} \right) + \left(\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} \right) = 0. \quad (5.46)$$

Полагая

$$\left(\ddot{\psi} + 3H\dot{\psi} \right) = Q(t), \quad \left(\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} \right) = -Q(t), \quad (5.47)$$

получаем, что (5.46) тождественно выполняется.

Решениями для (5.47) являются:

$$\dot{\psi} = \frac{1}{t} \left(\int Q(t) t dt + C_\psi \right), \quad (5.48)$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{t} \left(- \int Q(t) t dt + C_\phi \right). \quad (5.49)$$

Интегрирование выражений (5.48)-(5.49) не требуется, поскольку динамические уравнения (5.43)-(5.45) зависят только от производных полей ϕ и ψ .

Теперь можно определить $\dot{\chi}$ из (5.45), подставив (5.49) и (5.47) в (5.45). После алгебраических преобразований получаем:

$$\dot{\chi} = \sqrt{\frac{3}{2}} Q(t) t \left(C_\phi - \int Q(t) t dt \right)^{-1}. \quad (5.50)$$

Вторую производную $\ddot{\chi}$:

$$\ddot{\chi} = \dot{\chi} \left[\frac{\dot{Q}}{Q} + \frac{1}{t} - \left(C_\phi - \int Q(t) t dt \right)^{-1} \right], \quad (5.51)$$

подставляем в (5.43). В результате уравнение (5.43) принимает следующий вид:

$$-\dot{\chi} \left[\frac{\dot{Q}}{Q} + \frac{2}{t} - \left(C_\phi - \int Q(t) t dt \right)^{-1} \right] + \quad (5.52)$$

$$+ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{t^2} e^{-\sqrt{\frac{2}{3}} \chi} \left(- \int Q(t) t dt + C_\phi \right) \left(\int Q(t) t dt + C_\psi \right). \quad (5.53)$$

Таким образом, имеем обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными вида:

$$e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} d\chi = \frac{f_2(t)}{f_1(t)} dt, \quad (5.54)$$

где

$$f_1(t) = \left[\frac{\dot{Q}}{Q} + \frac{2}{t} - \left(C_\phi - \int Q(t) t dt \right)^{-1} \right], \quad (5.55)$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{t^2} \left(- \int Q(t) t dt + C_\phi \right) \left(\int Q(t) t dt + C_\psi \right). \quad (5.56)$$

Наконец, можно определить χ , используя соотношение

$$e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\chi} = \sqrt{\frac{2}{3}} \int \frac{f_2(t)}{f_1(t)} dt. \quad (5.57)$$

Следующая задача показать, что пространство решений (5.57) не пусто. С этой целью находим несколько примеров решения, задав функцию $Q(t)$ в различной форме.

Зададим $Q = \frac{C}{t}$, где $C = const$, $C_\phi = 0$, $C_\psi = 0$. Тогда решением будет:

$$\chi = \sqrt{\frac{3}{2}} \ln \left| C_\chi - \frac{C^3}{4(C+1)} t^2 \right|, \quad C_\chi = const. \quad (5.58)$$

Ниже приведены примеры решений киральных полей (5.48)–(5.50) при выборе функции $Q(t)$:

1. Функция $Q(t)$ представляет собой некоторое постоянное значение: $Q = Q_*$.

$$\phi = -\frac{Q_*}{4} t^2 + c_\phi \ln |t| + C, \quad (5.59)$$

$$\psi = \frac{Q_*}{4} t^2 + c_\psi \ln |t| + C, \quad (5.60)$$

$$\chi = -\sqrt{\frac{2}{3}} \ln |Q_* t^2 - 2c_\phi|. \quad (5.61)$$

2. Функция $Q(t)$ зависит от t по степенному закону: $Q = Q_* t^n$, где n — любое число.

$$\phi = \frac{Q_* t^{n+2}}{(n+2)^2} + c_\phi \ln |t| + C, \quad (5.62)$$

$$\psi = -\frac{Q_* t^{n+2}}{(n+2)^2} + c_\psi \ln |t| + C, \quad (5.63)$$

$$\chi = -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\ln |Q_* t^{n+2} - c_\phi(n+2)|}{Q_*(n+2)} + C. \quad (5.64)$$

Оба примера показывают, что поля ψ и ϕ могут быть линейно связаны, а поле χ зависит от t логарифмически.

Решения для параметра Хаббла при постоянной форме потенциала W находятся из уравнения

$$3H^2 + \dot{H} = W_*, \quad (5.65)$$

которое является суммой уравнений (5.37) и (5.38).

1. Экспоненциальная зависимость от времени для масштабного фактора.

$$H = H_* = const, \quad a(t) = a_0 e^{H_* t}, \quad W_* = 3H_*^2, \quad (5.66)$$

где a_0 – масштабный фактор в начале инфляции.

2. Решение, определяемое гиперболическими функциями

$$H(t) = \sqrt{\frac{W_*}{3}} \tanh\left(\sqrt{3W_*}(t - t_*)\right), \quad a(t) = a_0 \cosh^{1/3}\left(\sqrt{3W_*}(t - t_*)\right), \quad (5.67)$$

где $\gamma = -1$, и

$$H(t) = \sqrt{\frac{W_*}{3}} \coth\left(\sqrt{3W_*}(t - t_*)\right), \quad a(t) = a_0 \sinh^{1/3}\left(\sqrt{3W_*}(t - t_*)\right), \quad (5.68)$$

где $\gamma = 1$.

3. Решение, определяемое тригонометрическими функциями

$$H(t) = -\sqrt{\frac{W_*}{3}} \operatorname{tg}\left(\sqrt{3W_*}(t - t_*)\right), \quad a(t) = a_0 \cos^{1/3}\left(\sqrt{3W_*}(t - t_*)\right), \quad (5.69)$$

где $\gamma = 1$. Решение (5.69) может быть представлено в другой форме:

$$H(t) = \sqrt{\frac{W_*}{3}} \operatorname{ctg}\left(\sqrt{3W_*}(t - t_*)\right), \quad a(t) = a_0 \sin^{1/3}\left(\sqrt{3W_*}(t - t_*)\right), \quad (5.70)$$

где $\gamma = 1$.

Установим аналог приведённого выше: $W = 0$,

$$f_1(\phi, \psi) = \psi B_2(\phi, \psi). \quad (5.71)$$

Таким образом, соотношение между ϕ и χ принимает вид:

$$\phi = 4W_* e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}. \quad (5.72)$$

Если дополнительно установить $h_{22} = 0$ или $\psi B_1(\phi, \psi) - \frac{1}{2}X(\phi, \psi) = 0$, то динамические уравнения (5.43)–(5.45) будет действительным. Их решения можно представить в общем виде, с включением параметра Хаббла:

$$\left(\ddot{\psi} + 3H\dot{\psi}\right) = Q(t), \quad (5.73)$$

$$\left(\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi}\right) = -Q(t). \quad (5.74)$$

Решения:

$$\dot{\psi} = \frac{1}{a^3(t)} \left(\int a^3(t)Q(t)dt + C_\psi \right), \quad (5.75)$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{a^3(t)} \left(- \int a^3(t)Q(t)dt + C_\phi \right). \quad (5.76)$$

Поскольку $W = W_* = \text{const}$ (и, следовательно, производные по полям будут равны нулю), то динамические уравнения (5.43)–(5.45) не изменяются. Таким образом, можно применить тот же подход, что и в случае с $W = 0$.

Используя (5.72), находится связь между производными на ϕ и производными на χ

$$\dot{\phi} = \sqrt{\frac{2}{3}}\phi\dot{\chi}, \quad \ddot{\phi} = \sqrt{\frac{2}{3}}\phi \left(\ddot{\chi} + \sqrt{\frac{2}{3}}(\dot{\chi})^2 \right). \quad (5.77)$$

Используя (5.77) в (5.74), получаем:

$$-Q(t) = \sqrt{\frac{2}{3}}\phi \left[\ddot{\chi} + \sqrt{\frac{2}{3}}(\dot{\chi})^2 + 3H\dot{\chi} \right]. \quad (5.78)$$

Подстановка (5.78) в уравнение поля (5.45) дает:

$$-\sqrt{\frac{2}{3}}\phi \left[\ddot{\chi} + 2\sqrt{\frac{2}{3}}(\dot{\chi})^2 + 3H\dot{\chi} \right] = 0. \quad (5.79)$$

Таким образом, используя соотношение

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} = -2\sqrt{\frac{2}{3}}\dot{\chi}^2 \quad (5.80)$$

в (5.43), уменьшается порядок дифференциального уравнения.

Уравнение (5.43) имеет следующий вид:

$$2\sqrt{\frac{2}{3}}\dot{\chi}^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi}\dot{\phi}\dot{\psi} = 0. \quad (5.81)$$

Используя (5.72), (5.77) и произведя алгебраические преобразования, получаем

$$\dot{\chi}^2 + \sqrt{\frac{2}{3}}\dot{\chi}\dot{\psi} = 0. \quad (5.82)$$

Итак, соотношение для $\dot{\chi}$ и $\dot{\psi}$ записывается следующим образом:

$$\dot{\chi} = -\sqrt{\frac{2}{3}}\dot{\psi}. \quad (5.83)$$

Решение для киральных полей:

$$\phi = \int a(t)^{-3} [-F(t) + C_\phi] dt, \quad (5.84)$$

$$\psi = \int a(t)^{-3} [F(t) + C_\psi] dt, \quad (5.85)$$

$$\chi = -\sqrt{\frac{2}{3}} \int a(t)^{-3} [F(t) + C_\chi] dt, \quad (5.86)$$

где

$$F(t) = \int a^3(t)Q(t)dt. \quad (5.87)$$

Таким образом, получили решения для гравитационного поля по параметру Хаббла в виде (5.67)–(5.70). Чтобы получить решения для киральных полей, необходимо подставить каждый параметр Хаббла в решения (5.84)–(5.86).

Ниже приведены примеры решений для киральных полей (5.84)–(5.86) со следующим значением масштабного фактора:

$$a(t) = a_0 \sinh^{\frac{1}{3}} \left(\sqrt{3W_*} (t - t_*) \right). \quad (5.88)$$

Для простоты типа решений занулим постоянные интегрирования.

1. $Q(t) = a_0^{-3}$.

$$F(t) = \frac{\cos(\sqrt{3W_*}(t - t_*))}{\sqrt{3W_*}}, \quad (5.89)$$

$$\phi = -\frac{\cos(\sqrt{3W_*}(t - t_*))}{\sqrt{3W_*}}, \quad (5.90)$$

$$\psi = \frac{\cos(\sqrt{3W_*}(t - t_*))}{\sqrt{3W_*}}, \quad (5.91)$$

$$\chi = -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\cos(\sqrt{3W_*}(t - t_*))}{\sqrt{3W_*}}. \quad (5.92)$$

$$2. Q(t) = \cosh(\sqrt{3W_*}(t - t_*)).$$

$$F(t) = \frac{a_0^3 \sinh^2(\sqrt{3W_*}(t - t_*))}{2\sqrt{3W_*}}, \quad (5.93)$$

$$\phi = -\frac{\cosh(\sqrt{3W_*}(t - t_*))}{6W_*}, \quad (5.94)$$

$$\psi = \frac{\cosh(\sqrt{3W_*}(t - t_*))}{6W_*}, \quad (5.95)$$

$$\chi = -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\cosh(\sqrt{3W_*}(t - t_*))}{6W_*}. \quad (5.96)$$

$$3. Q(t) = \frac{1}{a_0^3} \coth(\sqrt{3W_*}(t - t_*)).$$

$$F(t) = \frac{\sinh(\sqrt{3W_*}(t - t_*))}{\sqrt{3W_*}}, \quad (5.97)$$

$$\phi = -\frac{t}{a_0^3 \sqrt{3W_*}}, \quad (5.98)$$

$$\psi = \frac{t}{a_0^3 \sqrt{3W_*}}, \quad (5.99)$$

$$\chi = -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{t}{a_0^3 \sqrt{3W_*}}. \quad (5.100)$$

Примеры решений со значением масштабного фактора:

$$a(t) = a_0 \cosh^{\frac{1}{3}}(\sqrt{3W_*}(t - t_*)). \quad (5.101)$$

$$1. Q(t) = a_0^{-3}.$$

$$F(t) = \frac{\sinh(\sqrt{3W_*}(t - t_*))}{\sqrt{3W_*}}, \quad (5.102)$$

$$\phi = -\frac{a_0^3}{3W_*} \ln(\cosh(\sqrt{3W_*}(t - t_*))), \quad (5.103)$$

$$\psi = \frac{a_0^3}{3W_*} \ln(\cosh(\sqrt{3W_*}(t - t_*))), \quad (5.104)$$

$$\chi = -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{a_0^3}{3W_*} \ln(\cosh(\sqrt{3W_*}(t - t_*))). \quad (5.105)$$

$$2. Q(t) = \sinh(\sqrt{3W_*}(t - t_*)).$$

$$F(t) = \frac{a_0^3 \sinh^2(\sqrt{3W_*}(t - t_*))}{2\sqrt{3W_*}}, \quad (5.106)$$

$$\phi = -\frac{1}{6W_*} \left[\sinh \left(\sqrt{3W_*} (t - t_*) \right) + \arctan \left(\sinh \left(\sqrt{3W_*} (t - t_*) \right) \right) \right], \quad (5.107)$$

$$\psi = \frac{1}{6W_*} \left[\sinh \left(\sqrt{3W_*} (t - t_*) \right) + \arctan \left(\sinh \left(\sqrt{3W_*} (t - t_*) \right) \right) \right], \quad (5.108)$$

$$\begin{aligned} \chi = & -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{6W_*} \left[\sinh \left(\sqrt{3W_*} (t - t_*) \right) + \right. \\ & \left. + \arctan \left(\sinh \left(\sqrt{3W_*} (t - t_*) \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.109)$$

$$3. Q(t) = \frac{1}{a_0^3} \tanh \left(\sqrt{3W_*} (t - t_*) \right).$$

$$F(t) = \frac{\cosh \left(\sqrt{3W_*} (t - t_*) \right)}{\sqrt{3W_*}}, \quad (5.110)$$

$$\phi = -\frac{t}{a_0^3 \sqrt{3W_*}}, \quad (5.111)$$

$$\psi = \frac{t}{a_0^3 \sqrt{3W_*}}, \quad (5.112)$$

$$\chi = -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{t}{a_0^3 \sqrt{3W_*}}. \quad (5.113)$$

Приведенные примеры показывают, что скалярные поля ψ , ϕ , χ могут быть линейно связаны друг с другом.

5.5 Выводы к Главе 5

Глава 5 посвящена исследованию ККМ, соответствующей наиболее общей и сложной МТГ с учётом скалярной кривизны и её производных первого и второго порядка, представленным функцией $f(R, (\nabla R)^2, \square R)$. Данная модель объединяет и обобщает ранее рассмотренные частные случаи $f(R, (\nabla R)^2)$ -, $f(R, \square R)$ -гравитаций, тем самым предоставляя универсальный формализм для исследования космологической динамики в рамках модифицированных теорий гравитации высших порядков.

С помощью метода введения множителей Лагранжа и дополнительных независимых скалярных полей произведён переход от МТГ высшего порядка к эквивалентному действию Эйнштейна с тремя взаимосвязанными киральными полями. Это позволило значительно упростить анализ динамики и избежать

решения сложных уравнений шестого порядка. Структура модели описывается киральной метрикой с тремя компонентами и потенциалом взаимодействия, зависящим от этих полей.

В пространственно-плоской вселенной с метрикой ФРУ получены уравнения динамики киральных полей с учётом взаимодействия и связанных с ними уравнений космологической динамики. Эти уравнения обобщают модели с меньшим числом полей и открывают пути для поиска новых точных решений.

Для нулевого потенциала $W = 0$ выявлено решение, при котором одно из киральных полей обращается в ноль, а два других обладают логарифмической зависимостью от космического времени. Эти решения характеризуют космологическую динамику с параметром Хаббла вида $H = \frac{1}{3(t-t_*)}$, что соответствует степенному расширению с индексом $1/3$.

При дополнительном требовании $h_{22} = 0$, которое связывает компоненты киральной метрики, получена общая функциональная зависимость киральных полей, содержащая произвольную функцию от времени $Q(t)$. Выбирая конкретные формы $Q(t)$, формируется широкий спектр решений, включая логарифмические и степенные функции. Таким образом, модель достигает гибкости в описании разнообразных космологических сценариев.

В случае постоянного потенциала $W = W_*$ найденные решения для параметра Хаббла и масштабного фактора принимают экспоненциальную, гиперболическую или тригонометрическую форму. Такая динамика позволяет описать последовательные фазы космологической эволюции: инфляцию, её завершение и последующее постинфляционное расширение.

Предложена методика сведения многополевой киральной модели к однополевой, что значительно упрощает расчёт спектральных характеристик возмущений – скалярного спектрального индекса, тензорно-скалярного отношения и спектра мощности. Эта процедура критична для сопоставления теоретических предсказаний с современными наблюдениями по космической микроволновой фоновой радиации.

Полученные решения и методология охватывают как специфические частные случаи известных моделей (например, $f(R, (\nabla R)^2)$ или $f(R, \square R)$), так и предоставляют основу для дальнейших исследований более сложных моделей с высшими производными и потенциальными поправками.

По результатам исследования, изложенного в Главе 5, обосновано следующее положение, выносимое на защиту:

3. Космологические решения в условиях режима медленного скатывания, обеспечивающие раннюю космологическую инфляцию при постоянном потенциале скалярного поля в однополевой киральной космологической модели, редуцированной из киральной модели с тремя киральными полями при линейной зависимости двух полей от третьего, соответствующей $f(R, (\nabla R)^2, \square R)$ -гравитации.

Результаты Главы 5 представлены в публикации [\[132\]](#).

Заключение

В ходе выполненного исследования была построена и проанализирована космологическая динамика МТГ вида $f(R, (\nabla R)^2, \square R)$ и её частных случаев $f(R, (\nabla R)^2)$, $f(R, \square R)$. Такие модели учитывают не только скалярную кривизну, но и её производные первого и второго порядка. Обоснован и реализован формализм сведения исходной сложной теории гравитации высшего порядка к ККМ с несколькими взаимодействующими скалярными полями, что позволяет радикально упростить поиск и анализ точных и приближённых решений уравнений космологической динамики.

Основные научные результаты работы.

Вывод уравнений космологической динамики для $f(R, (\nabla R)^2) = f_1(R) + X(R)\nabla_\mu R\nabla^\mu R$ -гравитации, содержащих производные шестого порядка по времени для масштабного фактора.

Представлен способ сведения этих уравнений к фридмановской космологии с эффективной космической жидкостью, плотность и давление которой определяются геометрическими параметрами модифицированной гравитации. Такое представление обеспечивает ясную физическую трактовку и возможность сопоставления результатов с полученными для фридмановской космологии.

Разработка скалярно-тензорных эквивалентов для моделей $f(R, (\nabla R)^2)$, $f(R, \square R)$ и $f(R, (\nabla R)^2, \square R)$. Введены соответствующие скалярные поля, метрика пространства целей и потенциалы, выполнен переход к действиям в картине Эйнштейна с несколькими киральными полями. Это позволило снизить порядок дифференциальных уравнений с шестого до второго, что существенно упрощает математический аппарат исследования и приближает модели к хорошо изученным мультиполевым инфляционным теориям.

В рамках работы построены и исследованы ККМ, включающие два и три скалярных поля, а также учитывающие взаимодействие с дополнительным материальным полем, которое моделируется идеальной жидкостью. Для таких систем получены и проанализированы точные аналитические решения, охватывающие как инфляционные сценарии (де Ситтера и квази-де Ситтера), так и новые режимы эволюции масштабного фактора – степенную и промежуточную инфляцию. Исследовано влияние материальных компонент на динамику инфляции и её параметры; показано, что модели допускают естественный вы-

ход из инфляционной фазы с последующим переходом к постинфляционному расширению.

Разработка метода сведения многополевых ККМ к однополевой форме. Представлен подход, позволяющий реконструировать однополевую модель и существенно облегчить вычисление спектральных космологических параметров: скалярного спектрального индекса, тензорно-скалярного отношения, спектра мощности. Полученные численные результаты хорошо согласуются с современными наблюдательными данными для степенной и промежуточной инфляции, в том числе полученных со спутника Planck в 2018 году.

Нахождение новых классов точных решений для скалярно-тензорных эквивалентов $f(R, \square R)$ - и $f(R, (\nabla R)^2, \square R)$ -гравитации. Получены классы решений при нулевом и постоянном потенциалах киральных полей, решения в условиях режима медленного скатывания, что расширяет спектр подходящих сценариев ранней космологической инфляции.

Выполнен математический вывод скалярно-тензорного эквивалента, который связывает исходную МТГ с действием, содержащим два скалярных поля и потенциал их взаимодействия. Универсальность подхода демонстрируется на примере модели Старобинского–Подольского: показано, что она является частным случаем $f_1(R) + X(R)\nabla_\mu R\nabla^\mu R$ -гравитации.

Предложенные методы снижения порядка уравнений через киральные модели с несколькими скалярными полями расширяют возможности для аналитических и численных исследований в космологии.

Сопоставление теоретических предсказаний с актуальными экспериментальными данными повышает шансы на верификацию и практическое применение моделей для объяснения природы тёмной энергии и инфляционных процессов без привлечения экзотических форм материи.

Полученные результаты задают направление для разработки мультиполевых инфляционных сценариев с реальными физическими степенями свободы и обоснованной динамикой выхода из фаз ускоренного расширения.

Перспектива исследования моделей, представленных в диссертации, заключается в расширении и углублении понимания космологической динамики и инфляционных процессов посредством МТГ, включающих зависимости от скалярной кривизны и её производных $f(R, (\nabla R)^2, \square R)$. Такое расширение позволяет не только моделировать раннюю инфляцию и позднее ускоренное расширение Вселенной без привлечения экзотических форм материи, но и

способствует точному вычислению спектральных параметров космологических возмущений. В сочетании с ККМ, включающими несколько скалярных полей, эти теории открывают новые возможности для описания сложных сценариев эволюции Вселенной и адекватного сравнения с данными современных космических миссий.

В работе 2025 года [133] было показано, что расширение классической гравитации за счёт добавления производных скалярной кривизны (в рамках $f(R, \nabla R)$ -теории) может влиять на процесс возникновения барионной асимметрии во Вселенной. Дальнейшее изучение того, как такие модификации меняют параметры бариогенеза, открывает перспективы для согласования теории с наблюдениями, в частности с величиной барионно-энтропийного отношения. Объединение результатов этой диссертации с исследованиями гравитационного бариогенеза позволяет построить единый подход, который связывает модифицированную гравитацию и инфляционную космологию с происхождением барионной асимметрии.

Таким образом, выполненная диссертация вносит значительный вклад в развитие теории модифицированной гравитации и её космологических приложений, предоставляя конкретные результаты, важные для современной космологии.

Благодарности

Автор глубоко признателен своему научному руководителю, профессору Червону Сергею Викторовичу, который в своё время привёл автора в науку и поверил в него как в исследователя. Внимательное и чуткое отношение профессора позволило разглядеть потенциал и возможности автора, вдохновляя и поддерживая его на каждом этапе исследовательской работы. Вера научного руководителя в силы и компетенцию автора стала важным стимулом для дальнейшего развития и достижения значимых результатов.

Поддержка и наставничество Сергея Викторовича сыграли ключевую роль в становлении автора как исследователя. Высокий профессионализм, безграничное терпение и готовность делиться знаниями создали благоприятные условия для глубокого понимания научных проблем и успешной реализации поставленных задач. Особое значение имело умение научного руководителя направлять мысли в нужное русло, что способствовало развитию аналитического мышления и самостоятельности в научной деятельности. Искренне благодарен за постоянное внимание, ценные советы и мудрое руководство, ставшие фундаментом успешного завершения исследования.

Особую признательность автор выражает профессору Игорю Владимировичу Фомину за глубочайшие знания в области, своевременные и ценные советы, а также конструктивную критику, значительно повысившие качество представленных материалов. Активное участие Игоря Владимировича в обсуждении результатов и хода исследования существенно укрепило научную основу работы.

Сергею Дмитриевичу Одинцову автор благодарен за проявленный интерес к теме исследования и значительный вклад в подготовку статьи. Его внимательное отношение к деталям и профессиональный подход к обсуждению научных вопросов сыграли важную роль в успешной подготовке публикации.

Алексею Васильевичу Николаеву выражается признательность за поддержку на начальных этапах исследования, отзывчивость и готовность помочь в решении возникавших вопросов, что способствовало успешному старту работы.

Автор также выражает благодарность заведующему кафедрой физики и технических дисциплин, Виктору Вячеславовичу Шишкареву, и всему коллек-

тиву кафедры за оказанную поддержку и помощь, содействие в оформлении документов после завершения диссертационной работы, а также за предоставленную возможность представить работу на кафедре.

Отдельная благодарность выражается участникам семинаров лаборатории гравитации, космологии и астрофизики за проявленный интерес к обсуждению результатов исследования, конструктивную критику и ценные советы, способствовавшие углублению и развитию темы работы.

Автор признателен за участие в научных проектах и финансовую поддержку, обеспечившую выполнение данного исследования. Особая благодарность выражается за поддержку в рамках Государственного задания № 2014/391 по проекту 1670, а также за финансирование по научным проектам РФФИ № 18-52-45016 и № 20-02-00280, Российского научного фонда (РНФ) № 22-22-00248 и Государственного задания № 073-03-2024-060.

Искренняя благодарность выражается также семье, друзьям и близким за постоянную поддержку, понимание и моральное сопереживание на протяжении всего периода работы над исследованием. Их внимание, участие и вдохновение стали важным источником сил и мотивации, способствовавшими успешному завершению научной работы.

Список сокращений и условных обозначений

ИСБ	Иванов–Салопек–Бонд
ККМ	киральная космологическая модель
КСГМ	киральная само-гравитирующая модель
МТГ	модифицированная теория гравитации
ОТО	общая теория относительности
СГСМ	само-гравитирующая сигма модель
ФРУ	Фридман–Робертсон–Уокер

Список терминов

модифицированная теория гравитации: Теория гравитации, обобщающая теорию гравитации Эйнштейна и допускающая переход к ней при определенных условиях

модифицированная теория гравитации высшего порядка: Теории гравитации, в которых уравнения гравитации содержат производные по компонентам метрики выше второго порядка.

$f(R)$ -гравитация: Теория гравитации, действие которой представлено в виде

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g} f(R) d^4x,$$

где κ — гравитационная постоянная Эйнштейна, g — определитель метрического тензора $g_{\mu\nu}$, $f(R)$ — функция скалярной кривизны R .

$f(R)$ -гравитация высшего порядка: Модифицированная теория гравитации, включающая модели, в подынтегральной функции действия f , которой включены кроме скалярной кривизны R , ее производные от первого порядка и выше, где принято обозначение $R_{;\mu} = \nabla_{\mu}R$, $R_{;\mu\nu} = \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}R$. В таких моделях уравнения гравитационного поля содержат производные выше второго порядка (по метрике).

Список литературы

1. Бисноватый-Коган, Г. С. Релятивистская астрофизика и физическая космология / Г. С. Бисноватый-Коган. – Москва : Красанд, 2011. – 376 с. – ISBN 978-5-396-00276-0.
2. Вайнберг, С. Космология / С. Вайнберг ; под ред. и с предисл. И. Я. Арефьевой, В. И. Саниока ; пер. с англ. К. Б. Алкалаева [и др.]. – Москва : ЛИБРОКОМ, 2013. – 608 с. – ISBN 978-5-453-00040-1.
3. Einstein, A. Spielen Gravitationsfelder im Aufbau der materiellen Elementarteilchen eine wesentliche Rolle? / A. Einstein // Das Relativitätsprinzip. Fortschritte der mathematischen Wissenschaften in Monographien. – Wiesbaden : Vieweg + Teubner Verlag, 1922. – P. 140–146. – ISBN 978-3-663-15597-3.
4. Уолд, Р. М. Общая теория относительности / Р. М. Уолд ; пер. с англ. В. Г. Гаврилов [и др.] ; под ред. И. Л. Бухбиндера, С. В. Червона. – Москва : РУДН, 2008. – 693 с. – ISBN 978-5-209-02964-9.
5. Фок, В. А. Теория пространства, времени и тяготения / В. А. Фок. – 2-е изд. – Москва : ЛИБРОКОМ, 2012. – 568 с. – ISBN 978-5-397-02307-8.
6. Type Ia Supernova Discoveries at $z > 1$ From the Hubble Space Telescope: Evidence for Past Deceleration and Constraints on Dark Energy Evolution / A. G. Riess, L.-G. Strolger, J. Tonry [et al.] // The Astrophysical Journal. – 2004. – Vol. 607, № 2 – P. 665–687.
7. The Supernova Legacy Survey: measurement of Ω_M , Ω_Λ and W from the first year data set / P. Astier, J. Guy, N. Regnault [et al.] // Astronomy and Astrophysics. – 2006. – Vol. 447, № 1. – P. 31–48.
8. Starobinsky, A. A. A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity / A. A. Starobinsky // Physics Letters B. – 1980. – Vol. 91, № 1. – P. 99–102.

9. Guth, A. H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems / A. H. Guth // Physical Review D. – 1981. – Vol. 23, iss. 2 – P. 347–356.
10. Linde, A. A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems / A. Linde // Physics Letter B. – 1982. – Vol. 108, № 6. – P. 389–393.
11. Фомин, И. В. Гравитационные волны ранней Вселенной / И. В. Фомин, С. В. Червон, А. Н. Морозов. – Москва : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018. – 154 с. – ISBN 978-5-7038-5003-9.
12. Odintsov, S. D. Recent Advances in Inflation / S. D. Odintsov, V. K. Oikonomou, I. Giannakoudi [et al.] // Symmetry. – 2023. – Vol. 15, № 9. – P. 1701 (69 pages).
13. Червон, С. В. Скалярные и киральные поля в космологии : монография / С. В. Червон, И. В. Фомин, С. А. Кубасов. – Ульяновск : ФГБОУ ВПО УЛГПУ им. И.Н. Ульянова, 2015. – 216 с. – ISBN 978-5-86045-832-1.
14. Долгов, А. Д. Космология ранней Вселенной / А. Д. Долгов, Я. Б. Зельдович, М. В. Сажин. – Москва : Изд-во Моск. ун-та, 1988. — 199 с. – ISBN 5-211-00108-7.
15. Бронников, К. А. Лекции по гравитации и космологии / К. А. Бронников, С. Г. Рубин. – Москва : Изд-во МИФИ, 2008. – 460 с. – ISBN 978-5-7262-1021-6.
16. Mukhanov, V. F. Physical Foundations of Cosmology / V.F. Mukhanov. – New York : Cambridge University Press, 2005. – 442 p. – ISBN 978-0-521-56398-7.
17. Петров, А. З. Новые методы в общей теории относительности / А. З. Петров. – Москва : Красанд, 2019. – 496 с. – ISBN 978-5-396-00178-7.
18. Nojiri, S. Introduction to Modified Gravity and Gravitational Alternative for Dark Energy / S. Nojiri, S. D. Odintsov // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. – 2007. – Vol. 04, № 08. – P. 115–145.
19. Odintsov, S. D. Geometric inflation and dark energy with axion $F(R)$ gravity / S. D. Odintsov, V. K. Oikonomou // Physical Review D. – 2020. – Vol. 101, iss. 4. – P. 044009 (14 pages).

20. Modified gravity and cosmology / T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla, C. Skordis // *Physics Reports*. – 2012. – Vol. 513, № 1. – P. 1–189.
21. Capozziello, S. Extended Theories of Gravity / S. Capozziello, M. De Laurentis // *Physics Reports*. – 2011. – Vol. 509, № 4. – P. 167–321.
22. Nojiri, S. Modified gravity theories on a nutshell: Inflation, bounce and late-time evolution / S. Nojiri, S. D. Odintsov, V. K. Oikonomou // *Physics Reports*. – 2017. – Vol. 692, iss. 7. – P. 1–104.
23. Cuzinatto, R. R. Inflationary dynamics in modified gravity models / R. R. Cuzinatto, L. G. Medeiros // *arXiv: электронный журнал*. – URL: <https://arxiv.org/abs/2404.11904v1>. – Дата публикации: 18.04.2024.
24. Cervantes-Cota, J. A Brief History of Gravitational Waves / J. Cervantes-Cota, S. Galindo-Uribarri, G. Smoot // *Universe*. – 2016. – Vol. 2, №. 3. – 22 p.
25. Pirani, F. A. E. Republication of: On the Physical significance of the Riemann tensor / F. A. E. Pirani // *General Relativity and Gravitation*. – 2009. – Vol. 41, iss. 5. – P. 1215–1232.
26. Testing General Relativity with Present and Future Astrophysical Observations / E. Berti, E. Barausse, V. Cardoso [et al.] // *Classical and Quantum Gravity*. – 2015. – Vol. 32, № 24 – P. 243001 (188 pages).
27. Myers, R. C. Holographic studies of quasi-topological gravity / R. C. Myers, M. F. Paulos, A. Sinha // *Journal of High Energy Physics*. – 2010. – Vol. 2010, iss. 8. – P. 35 (45 pages).
28. Lu, H. Spherically Symmetric Solutions in Higher-Derivative Gravity / H. Lu, A. Perkins, C. N. Pope, K.S. Stelle // *Physical Review D*. – 2015. – Vol. 92, iss. 12. – P. 124019 (31 pages).
29. Starobinsky, A. A. Dynamics of phase transition in the new inflationary universe scenario and generation of perturbations / A. A. Starobinsky // *Physics Letters B*. – 1982. – Vol. 117, № 3. – P. 175–178.
30. Gottlober, S. Sixth-order gravity and conformal transformations / S. Gottlober, H-J Schmidt, A. A. Starobinsky // *Classical and Quantum Gravity*. – 1990. – Vol. 7, № 5 – P. 893–900.

31. Naruko, A. Gravitational scalar-tensor theory / A. Naruko, D. Yoshida, S. Mukohyama // *Classical and Quantum Gravity* – 2016. – Vol. 33, № 9. – P. 09LT01 (6 pages).
32. Kaparulin, D. S. Classical and quantum stability of higher-derivative dynamics / D. S. Kaparulin, S. L. Lyakhovich, A. A. Sharapov // *The European Physical Journal C*. – 2014. – Vol. 74, iss. 10. – P. 3072 (39 pages).
33. Scalar-multi-tensorial equivalence for higher order $f(R, \nabla_\mu R, \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} R, \dots, \nabla_{\mu_1} \dots \nabla_{\mu_n} R)$ theories of gravity / R. R. Cuzinatto, A. M. de Melo, L. G. Medeiros, P. J. Pompeia // *Physical Review D*. – 2016. – Vol. 93, iss. 12. – P. 124034 (10 pages).
34. Houndjo, M. J. S. Higher-Derivative $f(R, \square R, T)$ Theories of Gravity / M. J. S. Houndjo, M. E. Rodrigues, N. S. Mazhari [et al.] // *International Journal of Modern Physics D*. – 2017. – Vol. 26, № 3. – P. 1750024 (14 pages).
35. Buchdahl, H. A. Non-linear lagrangians and cosmological theory // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 1970. – Vol. 150. – P. 1–8.
36. Is cosmic speed-up due to new gravitational physics? / S. M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden, M. S. Turner // *Physical Review D*. – 2004. – Vol. 70, iss. 4. – P. 043528 (5 pages).
37. Starobinsky, A. A. Disappearing cosmological constant in $f(R)$ gravity / A. A. Starobinsky // *JETP Lett.* – 2007. – Vol. 86, iss. 3. – P. 157–163.
38. Li, B. Cosmology of modified Gauss–Bonnet gravity / B. Li, J. D. Barrow, D. F. Mota // *Physical Review D*. – 2007. – Vol. 76, iss. 4. – P. 04402 (9 pages).
39. Faraoni, V. Modified gravity and the stability of de Sitter space / V. Faraoni // *Physical Review D*. – 2005. – V. 72, iss. 6. – P. 061501 (5 pages).
40. Faraoni, V. Stability of modified gravity models / V. Faraoni, S. Nadeau // *Physical Review D*. – 2005. – Vol. 72, iss. 12 – P. 124005 (10 pages).
41. Faraoni, V. De Sitter space and the equivalence between $f(R)$ and scalar-tensor gravity / V. Faraoni // *Physical Review D*. – 2007. – Vol. 75, iss. 6 – P. 067302 (4 pages).

42. Tsujikawa, S. Observational signatures of $f(R)$ dark energy models that satisfy cosmological and local gravity constraints / S. Tsujikawa // Physical Review D. – 2008. – Vol. 77, iss. 2. – P. 023507 (13 pages).
43. Guarnizo, A. Boundary Term in Metric $f(R)$ Gravity: Field Equations in the Metric Formalism / A. Guarnizo, L. Castaneda, J. M. Tejeiro // General Relativity and Gravitation. – 2010. – Vol. 42, iss. 11. – P. 2713–2728.
44. Saffari, R. $f(R)$ gravity: From the Pioneer anomaly to cosmic acceleration / R. Saffari, S. Rahvar // Physical Review D. – 2008. – Vol. 77, iss. 10. – P. 104028 (13 pages).
45. Generalized (R, ϕ, X) Gravity and the Late-Time Cosmic Acceleration / S. Bahamonde, C. Bohmer, F. Lobo, D Saez-Gomes // Universe. – 2015. – Vol. 1, iss. 2. – P. 186–198.
46. Barrow, J. D. On the evolution of universes in quadratic theories of gravity / J. D. Barrow, S. Herwik // Physical Review D. – 2006. – Vol. 74, iss. 12. – P. 124017.
47. Toporensky, A. V. De Sitter stability in quadratic gravity / A. V. Toporensky, P. V. Tretyakov // International Journal of Modern Physics D. – 2007. – Vol. 16, № 6. – P. 1075–1085.
48. Barrow, J. D. Simple types of anisotropic inflation / J. D. Barrow, S. Herwik // Physical Review D. – 2010. – Vol. 81, iss. 2. – P. 023513 (12 pages).
49. Nojiri, S. Modified Gauss–Bonnet Theory as Gravitational Alternative for Dark Energy / S. Nojiri, S. D. Odintsov // Physics Letters B. – 2005. – Vol. 631, № 1. – P. 1–6.
50. Li, B. The Cosmology of $f(R)$ Gravity in Metric Variational Approach // B. Li, J.D. Barrow // Physical Review D. – 2007. – Vol. 75, iss. 8. – P. 084010 (13 pages).
51. Li, B. The Cosmology of Modified Gauss–Bonnet Gravity / B. Li, J. D. Barrow, D.F. Mota // Physical Review D. – 2007. – Vol. 76, iss. 4. – P. 044027 (9 pages).

52. De Felice, A. Matter instabilities in general Gauss–Bonnet gravity / A. de Felice, D. F. Mota, S. Tsujikawa // *Physical Review D*. – 2010. – Vol. 81, iss. 2. – P. 023532 (9 pages).
53. Zwiebach, B. Curvature squared terms and string theories / B. Zwiebach // *Physics Letters B*. – 1985. – Vol. 156, № 5. – P. 315–317.
54. Zumino, B. Gravity Theories in More Than Four-Dimensions / B. Zumino // *Physics Reports*. – 1986. – Vol. 137, № 1. – P. 109–114.
55. Lovelock, D. The Einstein tensor and its generalizations / D. Lovelock // *Journal of Mathematical Physics*. – 1971. – Vol. 12, iss. 3. – P. 498–501.
56. Toporensky, A. Power-law anisotropic cosmological solution in 5+1 dimensional Gauss-Bonnet gravity / A. Toporensky, P. Tretyakov // *Gravitation and Cosmology*. – 2007. – Vol. 13, iss. 3. – P. 207–210.
57. Ivashchuk, V. On cosmological-type solutions in multi-dimensional model with Gauss-Bonnet term / V. Ivashchuk // *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*. – 2010 – Vol. 07, № 05. – P. 797–819.
58. Nojiri, S. Gauss-Bonnet dark energy / S. Nojiri, S.D. Odintsov, M. Sasaki // *Physical Review D*. – 2005. – Vol. 71, iss. 12. – P. 123509 (7 pages).
59. Wands, D. Extended Gravity Theories and the Einstein-Hilbert Action / D. Wands // *Classical and Quantum Gravity*. – 1994. – Vol. 11, № 1. – P. 269–280.
60. Schmidt, H.-J. Variational derivatives of arbitrarily high order and multiinflation cosmological models / H.-J. Schmidt // *Classical and Quantum Gravity*. – 1990. – Vol. 7, № 6. – P. 1023–1031.
61. Berkin, A. E. Effects of R^3 and $R\Box R$ term on R^2 inflation / A. E. Berkin, K. Maeda // *Physics Letters B*. – 1990. – Vol. 245, № 3-4. – P. 348–354.
62. Gottlober, S. Generalized inflation from R^3 and $R\Box R$ terms / S. Gottlober, V. Muller, H.-J. Schmidt // *Astronomische Nachrichten*. – 1991. – Vol. 312, № 5. – P. 291–297.
63. Kluske, S. Towards a cosmic no hair theorem for higher-order gravity / S. Kluske, H.-J. Schmidt // *Astronomische Nachrichten*. – 1996. – Vol. 317, № 5. – P. 337–348.

64. Carloni, S. Cosmology of $f(R, \square R)$ gravity / S. Carloni, J. L. Rosa, J. P. S. Lemos // *Physical Review D*. – 2019. – Vol. 99, iss. 10. – P. 104001 (21 pages).
65. Generalized sixth-order gravity and inflation / L. Amendola, A. B. Mayer, S. Capozziello [et al.] // *Classical Quantum Gravity*. – 1993. – Vol. 10, iss. 5. – P. L43–L47.
66. Peng, J.-J. Field equations and Noether potentials for higher-order theories of gravity with Lagrangians involving $\square^i R$, $\square^i R_{\mu\nu}$, $\square^i R_{\mu\nu\rho\sigma}$ / J.-J. Peng, H. Li // *arXiv: электронный журнал*. – URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2402.17429>. – Дата публикации: 19.11.2024.
67. Иванов, Г. Г. О модификации уравнений Эйнштейна на малых расстояниях / Г. Г. Иванов. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1986. – Вып. 23. – С. 78–82.
68. Gitman, D. M. Hamilton formulation of a theory with high derivatives / D. M. Gitman, S. L. Lyakhovich, I. V. Tyutin // *Soviet Physics Journal*. – 1983. – Vol. 26, iss. 8. – P. 730–734.
69. Bertin, M. C. Hamilton–Jacobi approach for first order actions and theories with higher derivatives / M. C. Bertin, B. M. Pimentel, P. J. Pompeia // *Annals of Physics*. – 2008. – Vol. 323, № 3. – P. 527–547.
70. Sotiriou, T. P. $f(R)$ theories of gravity / T.P. Sotiriou, V. Faraoni // *Reviews of Modern Physics*. – 2010. – Vol. 82, iss. 1. – P. 451–497.
71. Felsager, B. *Geometry, Particles and Fields* / B. Felsager // *The American Mathematical Monthly*. – 2nd ed. – Cham : Springer, 1983. – 672 p.
72. Ehlers, J. Isotropic Solutions of the Einstein–Liouville Equations / J. Ehlers, P. Geren, R.K. Sachs // *Journal of Mathematical Physics*. – 1968. – Vol. 9. – P. 1344–1349.
73. Clarkson, C. A. Cosmic microwave background and scalar-tensor theories of gravity / C. A. Clarkson, A. A. Coley, E. S. D. O’Neill // *Physical Review D*. – 2001. – Vol. 64, iss. 6. – P. 063510 (4 pages).
74. Inhomogeneous Cosmologies, the Copernican Principle and the Cosmic Microwave Background: More on the EGS Theorem / C. A. Clarkson, A. A.

- Coley, E. S. D. O'Neill [et al.] // General Relativity and Gravitation. – 2003. – Vol. 35, iss. 6. – P. 969–990.
75. Faraoni, V. Phantom cosmology with general potentials / V. Faraoni // Classical and Quantum Gravity. – 2005. – Vol. 22, № 16. – P. 3235.
76. Nojiri, S. Properties of singularities in (phantom) dark energy universe / S. Nojiri, S. D. Odintsov, S. Tsujikawa S. // Physical Review D. – 2005. – Vol. 71, iss. 6. – P. 063004 (16 pages).
77. Rubano, C. Variable G and Λ : scalar-tensor versus RG-improved cosmology / C. Rubano, P. Scudellaro // General Relativity and Gravitation. – 2005. – Vol. 37, iss. 3. – P. 521–539.
78. Capozziello, S. Recovering the effective cosmological constant in extended gravity theories / S. Capozziello, R. de Ritis, A. A. Marino // General Relativity and Gravitation. – 1998. – Vol. 30, iss. 8. – P. 1247–1272.
79. Damour, T. Tensor-multi-scalar theories of gravitation / T. Damour, G. Esposito-Farese // Classical and Quantum Gravity. – 1992. – Vol. 9. – P. 2093–2176.
80. Quandt, I. The Newtonian limit of fourth and higher order gravity / I. Quandt, H. J. Schmidt // Astronomische Nachrichten. – 1991. – Vol. 312, iss. 2. – P. 97–102.
81. Weinberg, S. Recent progress in gauge theories of the weak, electromagnetic and strong interactions / S. Weinberg // Reviews of Modern Physics. – 1974. – Vol. 46, iss. 2. – P. 255–277.
82. Chervon, S. V. Spherical symmetric solutions of $f(R)$ gravity with a kinetic curvature scalar / S. V. Chervon, J. Fabris, I. V. Fomin // arXiv: электронный журнал. – URL: <https://arxiv.org/abs/2005.11858v2>. – Дата публикации: 7.08.2020.
83. Chervon, S. V. Black holes and wormholes in $f(R)$ gravity with a kinetic curvature scalar / S. V. Chervon, J. C. Fabric, I. V. Fomin // Classical and Quantum Gravity – 2021. – Vol. 38, № 11. – P. 115005 (25 pages).

84. Chervon, S. V. On the chiral model of cosmological inflation / S. V. Chervon // Russian Physics Journal. – 1995. – Vol. 38, iss. 5. – P. 539–543.
85. Chervon, S. V. Chiral non-linear sigma models and cosmological inflation / S. V. Chervon // Gravitation and Cosmology. – 1995. – Vol. 1. – P. 91–96.
86. Gell-Mann, M. The axial vector current in beta decay / M. Gell-Mann, M. Perelomov // Il Nuovo Cimento. – 1960. – Vol. 16, iss. 5. – P. 705–726.
87. Perelomov, A. M. Chiral models: Geometrical aspects / A. M. Perelomov Chervon // Physics Reports. – 1987. – Vol. 146, № 3. – P. 135–213.
88. de Alfaro, V. Gauge Theories and Strong Gravity / V. de Alfaro, S. Fubini, G. Furlan // Il Nuovo Cimento A. – 1979. – Vol. 50, iss. 4. – P. 523–554.
89. Ivanov, G. G. Symmetries, conservation laws, and exact solutions in nonlinear sigma models / G. G. Ivanov // Theoretical and Mathematical Physics. – 1983. – Vol. 57, iss. 1. – P. 981–987.
90. Иванов, Г. Г. Точные решения в $SO(3)$ — инвариантной нелинейной сигма модели, связанные с изометрическими и гомотетическими симметриями / Г. Г. Иванов, С.В. Червон. – Казань : Изд-во Казан. ун-та. – 1987. – Вып. 24. – 37 с.
91. Chervon, S. V. Chiral Cosmological models: Dark Sector Fields Description / S. V. Chervon // Quantum Matter. – 2013. – Vol. 2, iss. 2. – P. 71–82.
92. Elizalde, E. Late-time cosmology in (phantom) scalar-tensor theory: Dark energy and the cosmic speed-up / E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov // Physical Review D. – 2004. – Vol. 70, iss. 4. – P. 043539 (20 pages).
93. Singular cosmological evolution using canonical and ghost scalar fields / S. Nojiri, S.D. Odintsov, V. Oikonomou, E. Saridakis // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. – 2015. – Vol. 2015, № 09. – P. 044 (41 pages).
94. Ivanov, V. R. Integrable modified gravity cosmological models with an additional scalar field / V. R. Ivanov, S. Y. Vernov // The European Physical Journal C. – 2021. – Vol. 81, iss. 11. – P. 985 (11 pages).

95. Anisotropic spacetimes in chiral scalar field cosmology / A. Giacomini, P. G. Leach, G. Leon, A. Paliathanasis // *The European Physical Journal Plus*. – 2021. – Vol. 136, iss. 10. – P. 1018 (17 pages).
96. Paliathanasis, A. Two scalar field cosmology: Conservation laws and exact solutions / A. Paliathanasis, M. Tsamparlis // *Physical Review D*. – 2014. – Vol. 90, iss. 4. – P. 043529 (12 pages).
97. Аббязов, Р. Р. Киральная космологическая модель, включающая тёмную энергию и тёмную материю / Р. Р. Аббязов, С. В. Червон // *Вестник РУДН*. – 2013. – Вып. 2. – С. 125–138.
98. Chervon, S. V. Inflaton and Non-Inflaton Perturbations in a Chiral Cosmological Model / S. V. Chervon, N. A. Koshelev // *Gravitation and Cosmology*. – 2003. – Vol. 9. – P. 196–202.
99. Paliathanasis, A. Exact solutions in Chiral cosmology / A. Paliathanasis, G. Leon, S. Pan // *General Relativity and Gravitation*. – 2019. – Vol. 51, iss. 9. – P. 106.
100. Nojiri, S. Unifying phantom in action with late-time acceleration: Scalar phantom-non-phantom transition model and generalized holographic dark energy // S. Nojiri, S. D. Odintsov // *General Relativity and Gravitation*. – 2006. – Vol. 38, iss. 8. – P. 1285–1304.
101. Elizalde, E. Reconstructing the universe history, from in action to acceleration, with phantom and canonical scalar fields / E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov, D. Saez-Gomes, V. Faraoni // *Physical Review D*. – 2008. – Vol. 77, iss. 10. – P. 106005 (16 pages).
102. Fomin, I. V. New method of exponential potentials reconstruction based on given scale factor in phantonical two-field models / I. V. Fomin, S. V. Chervon // *JCAP*. – 2022. – Vol. 2022. – P. 025.
103. Paliathanasis, A. Global dynamics of the hyperbolic Chiral-Phantom model / A. Paliathanasis, G. Leon // *The European Physical Journal Plus*. – 2022. – Vol. 137, iss. 1. – P. 165.

104. Anisotropic chiral cosmology: Exact solutions / L.R. Diaz-Barron, A. Espinoza-Garcia, S. PerezPayan, J. Socorro // International Journal of Modern Physics D. – 2021. – Vol. 30, № 11. – P. 2150080.
105. Liddle, A. R. The Cold dark matter density perturbation / A. R. Liddle, D. H. Lyth // Physics Reports. – 1993. – Vol. 231. – P. 1–105.
106. Кошелев, Н. А. Основы $f(R)$ теории гравитации : учебное пособие / Н.А. Кошелев, А. В. Николаев, С. В. Червон. – Ульяновск : ФГБОУ ВПО УлГПУ им. И.Н. Ульянова, 2015. – 38 с. – ISBN 978-5-86045-830-7.
107. Червон, С. В., Кубасов, А. С. Новый метод построения инфляционных решений в киральной космологической модели / С.В. Червон, А. С. Кубасов // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика, информатика, физика. – 2011. – № 1. – С. 134–143.
108. Фомин, И. В. Двухполевые космологические модели с повторным ускоренным расширением Вселенной / И. В. Фомин // ВМУ. Серия 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. – 2018. – № 6. – С. 112–116.
109. Kinetic scalar curvature extended $f(R)$ gravity / S. V. Chervon, A. V. Nikolaev, T. I. Mayorova, S. D. Odintsov // Nuclear Physics B. – 2018. – Vol. 936. – P. 597–614.
110. Rave, G. A. Production of primordial gravitational waves in teleparallel gravity / G. A. Rave, C. Escamilla-Rivera, J. Levi-Said // Physics of the Dark Universe. – 2023. – Vol. 42. – P. 101316.
111. Dyer, E. Boundary terms, variational principles, and higher derivative modified gravity / E. Dyer, K. Hinterbichler // Physical Review D. – 2023. – Vol. 79, iss. 2. – P. 024028 (20 pages).
112. Fujii, Y. The scalar-tensor theory of gravitation / Y. Fujii, K. Maeda. – Cambridge : Cambridge univ. press., 2003. – 260 p. – ISBN 978-0-521-03752-5.
113. Saridakis, E.N. Cosmology in new gravitational scalar-tensor theories / E. N. Saridakis, M. Tsoukalas // Physical Review D. – 2016. – Vol. 93, iss. 12. – P. 124032 (8 pages).

114. Pereira, S. H. Quantized fields and gravitational particle creation in $f(R)$ expanding universes / S. H. Pereira, C. H. G. Bessa, J. A. Lima // Physics Letters B. – 2010. – Vol. 690, № 2. – P. 103–107.
115. Parker, L. Quantized fields and particle creation in expanding universes / L. Parker // Physical Review Journals Archive. – Vol. 183, iss. 5. – P. 1057–1068.
116. Ford, L. H. Gravitational particle creation and inflation / L. H. Ford // Physical Review D. – 1987. – Vol. 35, iss. 10. – P. 2955–2960.
117. Zeldovich, Y. B. Particle creation by gravitational fields in collapse and singularity / Y. B. Zeldovich // Comments on Astrophysics and Space Physics. – 1971. – Vol. 3. – P. 179.
118. Zeldovich, Y. B. Particle production and vacuum polarization in an anisotropic gravitational field / Y. B. Zeldovich, A. A. Starobinsky // Sov. Phys. JETP. – 1972. – Vol. 34, № 6. – P. 1159–1166.
119. Faraoni, V. Cosmology in scalar tensor gravity / V. Faraoni. – 1st ed. – Cham : Springer, 2004. – 287 p. – ISBN : 978-1-4020-1989-0.
120. Scalar field cosmology / S. V. Chervon, I. V. Fomin, V. Yurov, A. Yurov. – Singapore : World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2019. – 263 p. – ISBN 978-981-120-507-1.
121. Nojiri, S. Unified cosmic history in modified gravity: from $F(R)$ theory to Lorentz non-invariant models / S. Nojiri, S. D. Odintsov // Physics Reports. – 2011. – Vol. 505, № 2. – P. 59–144.
122. Updated constraints on amplitude and tilt of the tensor primordial spectrum / G. Galloni, N. Bartolo, S. Matarrese [et al.] // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. – 2023. – Vol. 2023, № 04. – P. 062.
123. Fomin, I. V. Reconstruction of general relativistic cosmological solutions in modified gravity theories / I. V. Fomin, S. V. Chervon // Physical Review D. – 2019. – Vol. 100, iss. 2. – P. 023511 (12 pages).
124. Barrow, J. D. The behaviour of intermediate inflationary universes / J. D. Barrow, P. Saich // Physics Letters B. – 1990. – Vol. 249, № 3. – P. 406–410.

125. del Campo, S. Intermediate inflation under the scrutiny of recent data / S. del Campo // arXiv: электронный журнал. – URL: <https://arxiv.org/abs/1404.1649v2>. – Дата публикации: 9.04.2014.
126. Superpotential method for chiral cosmological models connected with modified gravity / S. V. Chervon, I. V. Fomin, E. O. Pozdeeva [et al.] // Physical Review D. – 2019. – Vol. 100, iss. 6. – P. 063522 (20 pages).
127. Chervon, S. V. On the derivation of the equations of the gravitational field in $f(R)$ gravity with a kinetic scalar of curvature / S. V. Chervon, A. V. Nikolaev, T. I. Mayorova // Space, Time and Fundamental Interactions. – 2017. – № 1. – P. 30–37.
128. Chervon, S. V. Chiral Cosmological Model of $f(R)$ Gravity with a Kinetic Curvature Scalar / S. V. Chervon, I. V. Fomin, T. I. Mayorova // Gravitation and Cosmology. – 2019. – Vol. 25, iss. 3. – P. 205–212.
129. Cosmological parameters of $f(R)$ gravity with kinetic scalar curvature / S. V. Chervon, I. V. Fomin, T. I. Mayorova, A. V. Khapaeva // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – Vol. 1557, № 1. – P. 012016.
130. Chervon, S. V. Chiral cosmological model of $f(R, \square R)$ gravity / S. V. Chervon, I. V. Fomin, T. I. Chaadaeva // Space, Time and Fundamental Interactions. – 2023. – № 1. – P. 117–120.
131. Chervon, S. V. Investigation of the Chiral Cosmological Model of $f(R, \square R)$ gravity / S. V. Chervon, I. V. Fomin, T. I. Chaadaeva // Space, Time and Fundamental Interactions. – 2023. – № 2. – P. 54–67.
132. Chaadaeva, T. I. Cosmological solutions of a chiral self-gravitating model of $f(R, (\nabla R)^2, \square R)$ gravity / T. I. Chaadaeva, S. V. Chervon // Space, Time and Fundamental Interactions. – 2024. – № 2. – P. 4–17.
133. Alruwaili, A. D. Investigating Baryon to Entropy Ratio Phenomenon in $f(R, \nabla R)$ Gravity / A. D. Alruwaili, N. Azhar, A. Jawad // Nuclear Physics B. – 2025. – Vol. 1018. – P. 117067 (15 pages).

Приложение А

Преобразование интегралов с производными от метрики

Итоговая форма интегралов, входящих в выражение (2.3):

$$\begin{aligned}
 & - \int d^4x \sqrt{-g} (R_\alpha R^\alpha X' + f') \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} = - \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu L^\mu - \\
 & \quad - \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu \nabla_\nu (R_\alpha R^\alpha X' + f') \delta g^{\mu\nu}, \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

где $L^\mu = (R_\alpha R^\alpha X' + f') \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\nu (R_\alpha R^\alpha X' + f') \delta g^{\mu\nu}$.

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \sqrt{-g} X g^{\alpha\beta} R_\beta R_{\mu\nu} \nabla_\alpha \delta g^{\mu\nu} = \int d^4x \sqrt{-g} \nabla^\beta N_\beta - \int d^4x \sqrt{-g} \nabla^\beta X \nabla_\beta R R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \\
 & \quad - \int d^4x \sqrt{-g} X \square R R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \int d^4x \sqrt{-g} X \nabla_\beta R \nabla^\beta R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \tag{A.2}
 \end{aligned}$$

где $N_\beta = X \nabla_\beta R R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$.

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \sqrt{-g} X g^{\alpha\beta} R_\beta g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \square \delta g^{\mu\nu} = \int d^4x \sqrt{-g} \nabla^\beta P_\beta - \int d^4x \sqrt{-g} \nabla^\alpha V_\alpha - \\
 & \quad - \int d^4x \sqrt{-g} \square (\nabla^j X \nabla_j R + X \square R) g_{mq} \delta g^{mq}, \tag{A.3}
 \end{aligned}$$

где $P_\beta = X R_\beta g_{\mu\nu} \square \delta g^{\mu\nu}$,

$V_\alpha = (\nabla^\alpha X \nabla_\alpha R + X \square R) g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\alpha (\nabla^\beta X \nabla_\beta R + X \square R) g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$.

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \sqrt{-g} \nu \delta g^{\mu\nu} = \int d^4x \sqrt{-g} \nabla^\beta W_\beta - \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu Z^\mu - \\
 & \quad - \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu \nabla_i \nu (\nabla^\beta X \nabla_\beta R + X \square R) \delta g^{\mu\nu}, \tag{A.4}
 \end{aligned}$$

где $W_\beta = X \nabla_\beta R \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu}$,

$Z^\mu = (\nabla^\beta X \nabla_\beta R + X \square R) \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\nu (\nabla^\beta X \nabla_\beta R + X \square R) \delta g^{\mu\nu}$.

Приложение Б

След уравнения гравитационного поля для $f(R, (\nabla R)^2, \square R)$ -гравитации

След уравнения гравитационного поля (2.11):

$$AX + BX' + CX'' + FX''' - 2f_1 + f_1'R + Df_1' = 0, \quad (\text{Б.1})$$

где параметры A, B, C, D, F определены следующим образом

$$A = -R_{,\alpha}R^{\alpha} - 2\square R - 6(\square R)^2, \quad (\text{Б.2})$$

$$B = -RR_{,\alpha}R^{\alpha} - 3\square(R_{,\alpha}R^{\alpha}) - 6(\square R)^2, \quad (\text{Б.3})$$

$$C = -9R_{,\alpha}R^{\alpha}\square R, \quad (\text{Б.4})$$

$$F = -3(RR_{,\alpha}R^{\alpha})^2, \quad (\text{Б.5})$$

$$D = 3\square. \quad (\text{Б.6})$$

Полагая $X(R) = 0$, из (2.11) получаем уравнения гравитационного поля $f(R)$ -гравитации. Параметры A, B, C, F , входящие в уравнение (Б.1), записываются в метрике ФРУ следующим образом:

$$A = 1728H^4\dot{H} - 288H^3\ddot{H} - (576\dot{H}^2 + 1044\ddot{H})H^2 + \\ + (3420\dot{H}\ddot{H} + 360\ddot{H}^2)H - 576\dot{H}^3 - 720\dot{H}\ddot{H} - 504\ddot{H}^2 - 36\ddot{H}^3,$$

$$B = -3456\dot{H}^4 - 6912H^2\dot{H}^3 + (6912H^4 - 18144H\ddot{H} - 1728\ddot{H}^2)\dot{H}^2 - \\ - (6912H^3\ddot{H} + 6048H^2\ddot{H} + 864H\ddot{H}^2 + 2376\ddot{H}^3)\dot{H} - \\ - 5616H^2\ddot{H}^2 - 3240H\ddot{H}\ddot{H} - 216\ddot{H}\ddot{H}^2 - 216\ddot{H}^3, \quad (\text{Б.7})$$

$$C = -1944(4H\dot{H} + \ddot{H})^2(12\dot{H}H^2 + 7\ddot{H}H + 4\dot{H}^2 + \ddot{H}) \quad (\text{Б.8})$$

$$F = -3888(4H\dot{H} + \ddot{H})^4, \quad (\text{Б.9})$$

где H – постоянная Хаббла, определяемая через масштабный фактор a : $H = \frac{\dot{a}}{a}$. Точка означает производную по космическому времени: $\dot{a} = da/dt$.