

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Российский государственный педагогический университет
им. А. И. Герцена»

На правах рукописи
УДК 524.834

Вертоградов Виталий Дмитриевич

**Исследование свойств динамических регулярных
черных дыр**

Специальность
1.3.3 — Теоретическая физика

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2026

Содержание

Введение	4
1 Статичные регулярные черные дыры	25
1.1 Регулярные черные дыры	25
1.2 Регулярные чёрные дыры и нелинейная электродинамика	31
1.3 Неустойчивость заряженных черных дыр. Эффект Пенроуза для заряженных частиц	34
1.4 Модели регулярных черных дыр	46
1.4.1 Чёрная дыра Хэйворда	46
1.4.2 Регулярная чёрная дыра Дымниковой	48
1.4.3 Непостоянный коэффициент уравнения состояния.	50
1.4.4 Уравнение состояния Хагедорна	54
1.5 Гравитационное расщепление	58
1.5.1 Черная дыра Киселева	62
1.6 Черная дыра Вайдья и гравитационное расщепление	64
1.7 Регулярные черные дыры и гравитационное расщепление	66
1.7.1 Чёрная дыра Хэйворда и гравитационное расщепление	67
1.7.2 Гравитационное расщепление и метрика Бардина	72
2 Образование регулярных черных дыр	76
2.1 Обобщенная метрика Вайдья	77
2.2 Структура горизонта видимости и его зависимость от энергетических условий	86
2.2.1 Заряженная чёрная дыра Вайдья	91
2.2.2 Регулярная чёрная дыра Хэйворда	93
2.2.3 Черная дыра Вайдья в окружении космологических полей	95

2.3	Динамическое обобщение регулярной черной дыры с изменяющимся уравнением состояния	96
2.4	Динамическое обобщение регулярной черной дыры Дымниковой	106
2.5	Регулярная черная дыра с модифицированным уравнением состояния газа Чаплыгина	115
2.6	Метод регуляризации	120
2.6.1	Случай пыли	121
2.6.2	Случай $\alpha = -\frac{1}{2}$	123
2.6.3	Общий случай	125
2.6.4	Регуляризация заряженной черной дыры Вайдья	126
2.7	Регулярная черная дыра как результат гравитационного коллапса пыли и излучения	127
2.8	Регулярная черная дыра как результат гравитационного коллапса барионного и кваркового вещества	133
2.9	Формирование произвольной регулярной черной дыры	136
3	Тень черной дыры	141
3.1	Общие замечания	141
3.2	Влияние материи на тень черной дыры: сферически-симметричный случай.	146
3.3	Влияние материи на тень черной дыры: стационарный случай .	154
3.4	Пример: тень черных дыр Шварцшильда и Рейсснера-Нордстрема при наличии дополнительной материи	160
3.4.1	Тень деформированной черной дыры Шварцшильда . . .	160
3.4.2	Тень деформированной черной дыры Рейсснера-Нордстрема	163
3.5	Метод расчета тени в случае асимптотически-плоского пространства-времени	170
3.6	Изменение тени черной дыры при изменении массы	175
3.7	Тень динамической черной дыры Бонора-Вайдья	180
3.8	Тень динамической чёрной дыры	195
	Заключение	206

Введение

Мотивация: Чёрные дыры занимают ключевое место в современной теории гравитации и астрофизике, представляя собой объекты, в которых проявляются наиболее сильные эффекты общей теории относительности. Современные наблюдения — от регистрации гравитационных волн до прямых изображений теней чёрных дыр — подтвердили их существование как реальных космических объектов. Однако на теоретическом уровне остаются фундаментальные вопросы, связанные с внутренней структурой этих объектов. Одним из центральных является проблема пространственно-временной сингулярности, возникающей в классических решениях Эйнштейна, где кривизна пространства-времени становится бесконечной, а сама теория утрачивает применимость.

Эта проблема делает актуальным рассмотрение моделей *регулярных чёрных дыр* — решений, свободных от физических сингулярностей, которые могут возникать в результате реалистичного гравитационного коллапса. В данной работе исследуются механизмы формирования таких объектов на основе физически обоснованных уравнений состояния вещества, а также их наблюдаемые характеристики, включая тени в статических и динамических пространствах-времени.

Актуальность проблемы: В 1916 году немецкий астроном Карл Шварцшильд получил первое точное решение уравнений Эйнштейна в вакууме для случая сферической симметрии. Это решение, известное в наши дни как метрика Шварцшильда, стало важным шагом в подтверждении предсказаний общей теории относительности. В частности, оно позволило объяснить наблюдаемую аномальную прецессию перигелия Меркурия, а также предсказать эффект отклонения световых лучей в гравитационном поле Солнца, что позднее было подтверждено экспериментально.

В координатах Бойера–Линдквиста это решение демонстрирует две особенности: одну в центре при $r = 0$, а другую на радиусе $r = \frac{2GM}{c^2}$, который позже получил название радиуса Шварцшильда. Сам Шварцшильд интерпретировал эту особенность как границу, вне которой никакие сигналы не могут распространяться обратно во внешнее пространство. Позднее эта гра-

ница была формализована как горизонт событий — поверхность, разделяющая область пространства-времени, из которой возможно излучение сигналов, и область, из которой такие сигналы принципиально невозможны. Таким образом, горизонт событий представляет собой границу области, которая не является причинным прошлым будущей изотропной бесконечности \mathcal{I}^+ , то есть область, которую ничто, даже свет, не может покинуть.

Долгое время подобные объекты в научной литературе назывались коллапсарами или замороженными звёздами. Лишь в 1960-х годах Джон Уиллер ввёл термин «чёрная дыра», который стал общепринятым в дальнейших исследованиях.

С развитием математического аппарата ОТО выяснилось, что особенность на горизонте событий является лишь координатной, то есть исчезает при переходе к подходящим системам координат. Это позволило продолжить метрику Шварцшильда внутрь горизонта событий. В отличие от этого, особенность при $r = 0$ не устраняется никакими координатными преобразованиями и представляет собой истинную физическую сингулярность пространства-времени.

В дальнейшем сингулярности были классифицированы на два типа: гравитационно-сильные и гравитационно-слабые [1–3]. Гравитационно-сильной называется такая сингулярность, которая приводит к полному сжатию любого падающего на неё объекта до нулевого объёма с одновременным продольным растяжением. Если же воздействие сингулярности не приводит к разрушению объекта таким образом, она классифицируется как гравитационно-слабая. Сингулярность в решении Шварцшильда относится именно к гравитационно-сильному типу.

В 1939 году Оппенгеймер и Снейдер предложили первую модель сферически-симметричного гравитационного коллапса, рассматривая идеализированный случай однородной пыли [4]. В рамках этой модели было показано, что процесс необратимого сжатия приводит к образованию черной дыры, описываемой метрикой Шварцшильда. Авторы предположили, что внутренняя область звезды может быть представлена как закрытое решение Фридмана–Робертсона–Уокера (ФРУ), соответствующее уравнению состояния пыли $P = 0$, тогда как внешнее пространство описывается статической

метрикой Шварцшильда. Позднее было строго доказано, что указанные решения могут быть гладко сшиты на границе коллапсирующего вещества [5].

Однако модель Фридмана–Робертсона–Уокера представляет собой высокую степень идеализации, поскольку предполагает полную однородность и изотропность материи. Учет реальных неоднородностей в распределении плотности вещества существенно влияет на характер коллапса. Как было показано в ряде исследований [6–10], при определённых начальных условиях гравитационный коллапс может завершаться формированием так называемой голой сингулярности. Это означает, что сингулярность возникает раньше, чем успевает сформироваться горизонт видимости— динамический аналог горизонта событий, являющийся границей ловушечной области [11].

Более того, исследования показали, что в таких сценариях внешний наблюдатель может получать информацию о физических процессах, происходящих в непосредственной близости от голой сингулярности. Таким образом, подобные модели ставят под сомнение универсальность гипотезы космической цензуры Пенроуза.

В 1969 году Роджер Пенроуз сформулировал и доказал одну из первых теорем о существовании сингулярностей в общей теории относительности [12]. Эта теорема утверждает, что при выполнении сильного энергетического условия — согласно которому гравитационное взаимодействие имеет притягивающий характер — гравитационный коллапс неизбежно приводит к возникновению пространственно-временной сингулярности, как только формируется горизонт видимости и замкнутая ловушечная область.

Особую значимость результату Пенроуза придаёт то, что образование сингулярности не является артефактом моделей с высокой симметрией. Как было показано позднее, сингулярности возникают также и в общем случае, без предположений о симметрии системы [13]. Таким образом, наличие сингулярности следует рассматривать как фундаментальную особенность классической общей теории относительности.

Сингулярность указывает на принципиальные ограничения ОТО в описании сверхплотных объектов, поскольку в окрестности такой точки классическая теория не может в полной мере описать физические процессы происходящие в этой области. В связи с этим научным сообществом были предпри-

няты многочисленные попытки построить модели черных дыр, свободных от центральной сингулярности. Такие объекты получили название регулярных черных дыр. Их существование требует нарушения сильного энергетического условия, что позволяет избежать формирования сингулярности и тем самым обойти условия применимости теоремы Пенроуза.

Первую идею о том, что сингулярность можно избежать, если рассмотреть вещество, обладающее свойствами вакуума и описываемое метрикой де Ситтера, предложили Сахаров [14] и Глинер [15]. Эта концепция заключалась в том, что в условиях сверхвысоких плотностей вещество может проявлять эффективное отталкивающее поведение, аналогичное космологической постоянной. Впоследствии данная идея была развита в работах Дымниковой, Гуревича и Старобинского [16, 17].

Первую конкретную модель регулярной черной дыры предложил Джеймс Бардин [18], который модифицировал метрику Шварцшильда, заменив постоянную массу на функцию $m(r)$, зависящую от радиальной координаты. Подбором специального вида этой функции Бардин добился того, чтобы скаляр Кречмана оставался конечным во всём пространстве-времени, тем самым исключив наличие сингулярности. Поскольку в окрестности центра ($r \rightarrow 0$) кривизна Риччи положительна, внутренняя область решения приобретает характер метрики де Ситтера, что позволяет говорить о существовании центрального ядра типа де Ситтера.

Однако ключевым недостатком подхода Бардина было то, что его решение не являлось прямым следствием уравнений Эйнштейна с заданным физическим источником. Напротив, метрика подбиралась заранее, а уже затем вычислялось соответствующее распределение энергии-импульса. Природа такого вещества долгое время оставалась неясной. Лишь спустя три десятилетия было показано, что источником черной дыры Бардина может служить магнитный монополь в рамках нелинейной электродинамики [19, 20].

С тех пор нелинейная электродинамика стала одной из наиболее популярных моделей для описания источников регулярных черных дыр [21–27]. Однако у этого подхода имеется существенный недостаток: лагранжиан теории строится искусственно, исходя из требуемого вида метрики, описывающей регулярную черную дыру, а не из фундаментальных принципов [28].

Таким образом, для построения моделей регулярных черных дыр можно использовать два основных метода:

- Первый метод заключается в том, что предполагается определённое распределение вещества, после чего составляются и решаются уравнения Эйнштейна, описывающие геометрию пространства-времени, свободную от сингулярностей [29]. В данной работе используется исключительно этот метод исследования регулярных черных дыр.
- Второй метод заключается в подборе метрики пространства-времени, которая описывает регулярную черную дыру [18, 30], после чего на основе уравнений Эйнштейна определяется соответствующий тензор энергии-импульса. Подобный подход зачастую приводит к нефизичному распределению материи. Как мы уже упоминали, регулярные черные дыры нарушают сильное энергетическое условие, но данный метод часто приводит также к нарушению слабого и доминантного энергетических условий. Слабое энергетическое условие требует, чтобы плотность энергии, измеренная любым времени-подобным наблюдателем, была неотрицательной. Доминантное энергетическое условие утверждает, что скорость распространения энергии не должна превышать скорости света, то есть материя должна двигаться вдоль времени-подобных или светоподобных мировых линий. Нарушение указанных условий делает интерпретацию полученного распределения материи крайне затруднительной и зачастую невозможной. По этой причине такой подход представляет интерес преимущественно с математической точки зрения и в данной работе применяться не будет.

Образование регулярных чёрных дыр в результате гравитационного коллапса долгое время оставалось нерешённой задачей. Большинство исследований, посвящённых регулярным чёрным дырам, рассматривали статические объекты, не зависящие от времени. Однако тензор энергии-импульса, описывающий такую чёрную дыру, имеет достаточно экзотический вид, и вещество реальных звёзд не обладает подобными свойствами.

Поэтому одной из главных проблем остаётся описание механизма гравитационного коллапса звезды, при котором её вещество в результате сильного

сжатия переходит в состояние, препятствующее образованию сингулярности и приводящее к формированию регулярной чёрной дыры.

До недавнего времени существовали работы [31–36], в которых было показано, что результатом гравитационного коллапса может быть регулярная чёрная дыра. Однако основной проблемой этих исследований являлось то, что либо в них заранее предполагалось наличие экзотического вещества, что естественным образом приводило к регулярному центру, либо подход был чрезмерно математизирован. В таких работах демонстрировалась принципиальная возможность формирования регулярной чёрной дыры в результате коллапса, но не уточнялось, какой именно тип вещества обеспечивает реализацию такого сценария.

В данной работе был рассмотрен процесс гравитационного коллапса для ряда моделей с физически обоснованными уравнениями состояния, и показано, что результатом такого коллапса может быть регулярная чёрная дыра [37–40]. В ходе исследования были выделены два наиболее вероятных подхода к изучению механизма формирования регулярного центра:

- Рассмотрение коллапса обычного вещества, которое на определённом расстоянии от центра (при достижении критических плотностей) переходит в состояние, описываемое регулярным решением. Такой метод предполагает сшивку двух решений — внешнего и внутреннего — на заданной гиперповерхности. Этот переход зависит от свойств вещества, описывающего различные слои звезды, и может интерпретироваться как фазовый переход, аналогичный тем, которые происходят в ранней Вселенной.
- Исследование гравитационного коллапса звезды, вещество которой состоит из нескольких компонент. Как правило, такой коллапс приводит к образованию сингулярности. Однако была разработана модель гравитационного коллапса системы, состоящей из пыли и излучения. При условии, что на определённом этапе сжатия основная масса вещества переходит в излучение, было показано, что результатом коллапса может быть регулярная чёрная дыра.

Регистрация гравитационных волн группами LIGO и VIRGO от событий слияния двух чёрных дыр [41, 42], а также получение первых изображений чёрных дыр в центрах галактик M87 [43–45] и Млечного Пути [46, 47] с помощью телескопа Event Horizon Telescope, придало чёрным дырам статус реальных астрофизических объектов.

В связи с этим значительно возрос интерес к регулярным чёрным дырам [48–67] и методам их наблюдения [68–88]. К числу наиболее информативных методов наблюдений относится исследование так называемых теней чёрных дыр [89].

Чёрная дыра сама по себе не излучает электромагнитных волн, поэтому о её существовании можно судить только по косвенным признакам — влиянию на окружающее вещество и пространство-время. Гравитационное поле чёрной дыры настолько сильно, что фотон, пролетая в его окрестности, может двигаться по неустойчивым круговым орбитам. Эти орбиты образуют так называемую фотон сферу — характерную область вокруг чёрной дыры.

Если рассмотреть ситуацию, в которой между ярким источником света и наблюдателем расположена чёрная дыра, то траектории световых лучей от источника могут быть разделены на три категории в зависимости от их параметров:

- Луч света пересекает фотон сферу и далее неизбежно попадает под горизонт событий чёрной дыры. Такой луч наблюдатель не зафиксирует.
- Луч света точно попадает на фотон сферу и начинает вращаться вокруг чёрной дыры по неустойчивой круговой орбите. Если не произойдёт внешних возмущений, такой свет также не достигнет наблюдателя.
- Луч света не пересекает фотон сферу и продолжает свой путь к наблюдателю.

Однако, если мы проследим все возможные траектории наблюдаемых лучей в обратном направлении — в прошлое — то на небесной сфере наблюдателя окажется область, свободная от света. Эта область соответствует направлениям, в которых лучи были захвачены чёрной дырой. Эта тёмная область называется *тенью чёрной дыры*.

Если бы световые лучи не искривлялись гравитационным полем чёрной дыры, а распространялись прямолинейно, то наблюдатель всё равно мог бы видеть на небесной сфере тёмную область — так называемую евклидову тень, соответствующую проекции горизонта событий. Однако из-за гравитационного отклонения света реальная тень чёрной дыры оказывается значительно больше: её угловой размер превышает евклидову тень примерно в 2.5 раза.

Одним из важных свойств тени является её уникальность: обычные компактные объекты, такие как белые карлики или нейтронные звёзды, не обладают аналогичной характеристикой — они не формируют тени подобного рода. Таким образом, тень долгое время рассматривалась как наблюдаемый признак, присущий исключительно чёрным дырам. Тем не менее, существуют исследования, демонстрирующие возможность формирования тени и у других экзотических объектов, таких как червоточины [90] и голые сингулярности [91, 92].

Исследование наблюдаемых свойств теней чёрных дыр позволяет проверять различные теоретические модели и выявлять, какие из них согласуются с астрономическими данными, а какие должны быть отвергнуты [93]. Как было показано Цупко и Бисноватым-Коганом [94], тень чёрной дыры может служить стандартной свечой для определения космологических расстояний. Однако, как указано в работе [95], этот метод требует дальнейшей доработки и верификации перед его применением на практике.

Реальная астрофизическая чёрная дыра, как правило, окружена аккреционным диском. Поэтому влияние окружающей плазмы на наблюдаемую тень чёрной дыры нельзя игнорировать. В настоящее время известны несколько подходов к изучению этого влияния. Мы выделим два основных:

- Рассмотреть черную дыру Шварцшильда и аккреционный диск как отдельные объекты. Затем, исходя из физических свойств вещества аккреционного диска, изучить распространение света в этой среде и определить его влияние на форму и размер тени [96–98].
- Другой подход заключается в том, чтобы рассматривать систему «чёрная дыра + аккреционный диск» как единое решение уравнений Эйнштейна. После построения соответствующей метрики исследуется дви-

жение фотонов в ней, и на основе разработанных методов строится тень чёрной дыры. Разработка такого подхода описывается в данной работе [99, 100].

Однако описанный метод учёта влияния аккреционного диска на тень является идеализированным, поскольку он не учитывает обратное воздействие аккрецирующего вещества на геометрию пространства-времени. Реальные чёрные дыры поглощают вещество, увеличивая свою массу, или теряют её за счёт излучения. Следовательно, метрика, описывающая такую чёрную дыру, должна быть динамической.

Учёт динамики пространства-времени значительно усложняет аналитический расчёт тени. Причину можно понять, сравнивая статический и динамический случаи. Для статических чёрных дыр существуют два вектора Киллинга — времени-подобный, отвечающий за инвариантность относительно временного сдвига, и пространственно-подобный, связанный со сферической симметрией. Наличие этих векторов приводит к двум сохраняющимся величинам: удельной энергии E и удельному моменту импульса L . Учитывая сферическую симметрию задачи и то, что движение происходит в одной плоскости, удаётся свести уравнения движения второго порядка к уравнениям первого порядка.

В случае динамического пространства-времени времени-подобный вектор Киллинга отсутствует, что приводит к тому, что энергия частицы уже не сохраняется. Это делает невозможным стандартное сведение уравнений второго порядка к уравнениям первого порядка. На помощь приходят специальные классы метрик, допускающие существование конформных или гомотетичных векторов Киллинга [101–103]. В таких пространствах можно ввести дополнительную сохраняющуюся величину, связанную с энергией частицы, вдоль изотропных, а в некоторых случаях и вдоль времени-подобных геодезических.

Наличие такой дополнительной симметрии позволяет не только исследовать тень чёрной дыры [92, 104, 105], но и анализировать эффекты столкновения частиц, такие как эффект Банадоса–Силка–Веста [106] и процесс Пенроуза [107]. Таким образом, благодаря этой симметрии становится воз-

можным снова свести уравнения движения второго порядка к уравнениям первого порядка и построить тень чёрной дыры аналитически.

Однако класс метрик, допускающих существование конформных или гомотетичных векторов Киллинга, является достаточно узким. Это ограничивает применимость подхода, основанного на наличии дополнительной симметрии пространства-времени. В связи с этим был разработан метод аналитического построения тени динамической чёрной дыры для случая медленного темпа аккреции [108].

Более того, в процессе разработки этого метода было показано, что при аккреции заряженных частиц на чёрную дыру возникает возможность извлечения энергии из её гравитационного поля. Такой механизм может быть связан с наблюдаемыми высокоэнергетическими космическими лучами, регистрируемыми на Земле.

Целью диссертационной работы является исследование механизмов образования регулярных чёрных дыр в рамках общей теории относительности, а также изучение их наблюдаемых характеристик, таких как тень и излучение, возникающее в процессе гравитационного коллапса. Для достижения указанной цели были поставлены и решены следующие задачи:

1. Построить модель статической регулярной чёрной дыры с физически обоснованным уравнением состояния.
2. Исследовать связь между структурой горизонтов видимости и светоподобными энергетическими условиями.
3. Разработать модель гравитационного коллапса барионной материи, приводящего к образованию регулярной чёрной дыры.
4. Оценить количество энергии, излучаемой в виде электромагнитного излучения при фазовых переходах вещества в процессе гравитационного коллапса массивной звезды.
5. Установить зависимость наблюдаемых размеров тени чёрной дыры от геометрических деформаций пространства-времени.

Диссертация представляет собой самостоятельное исследование. Все результаты получены автором лично или при его непосредственном участии. Основные научные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

1. Построена модель статической регулярной чёрной дыры, источником которой служит вещество Хагедорна, соответствующее реалистичному уравнению состояния при высоких плотностях.
2. Установлена зависимость эволюции горизонтов видимости от выполнения светоподобных энергетических условий. Проведён анализ процессов испарения чёрных дыр в контексте новых данных о поведении горизонтов видимости.
3. Разработана физически обоснованная модель гравитационного коллапса барионной материи, в рамках которой выявлены ключевые процессы, приводящие к образованию регулярной чёрной дыры.
4. Выполнена оценка плотности электромагнитного излучения, возникающего при фазовых переходах вещества в процессе гравитационного коллапса.
5. Обнаружены новые свойства тени динамической сферически-симметричной чёрной дыры. Показана её зависимость от светоподобных энергетических условий.
6. Установлена аналитическая зависимость между геометрическими деформациями пространства-времени и наблюдаемыми размерами тени чёрной дыры. Получено явное выражение для размера тени в зависимости от параметров деформации.

Научная новизна диссертационного исследования заключается в следующем:

- Построены модели статических регулярных чёрных дыр, источником которых служит вещество Хагедорна — физически обоснованное уравнение состояния при высоких плотностях.

- Выявлены условия, при которых дополнительная материя не приводит к образованию сингулярности в изначально регулярной чёрной дыре, что открывает новые возможности для построения моделей без гравитационных особенностей.
- Установлена зависимость структуры горизонтов видимости от выполнения светоподобных энергетических условий. Доказано, что при их соблюдении любая динамическая чёрная дыра асимптотически стремится к решению Вайдья. Показано, что испарение регулярных чёрных дыр может привести к образованию объектов с регулярным центром и отсутствием горизонтов, что может рассматриваться как возможное разрешение парадокса потери информации.
- Разработана модель гравитационного коллапса пыли и излучения, в рамках которой показано, что переход вещества в состояние излучения может привести к образованию регулярной чёрной дыры.
- Получена оценка энергии, излучаемой в виде электромагнитных волн при фазовых переходах вещества в процессе гравитационного коллапса.
- Предложен метод расчёта тени для статической сферически-симметричной чёрной дыры, окружённой аккреционным диском, с использованием метода гравитационного расщепления.
- Показано, что при испарении электрического заряда динамической чёрной дыры её тень увеличивается, что указывает на связь между электродинамическими и наблюдаемыми геометрическими свойствами.
- Продемонстрировано, что включение динамических эффектов может привести к тому, что голая сингулярность начинает отбрасывать тень, что ставит под сомнение возможность отличить такие объекты от чёрных дыр по наблюдательным данным.
- Разработан метод сравнения размеров тени произвольной сферически-симметричной асимптотически плоской чёрной дыры с тенью Шварцшильдовской чёрной дыры.

- Доказана теорема о том, что при аккреции тень чёрной дыры увеличивается тогда и только тогда, когда выполняются светоподобные энергетические условия. Приведены примеры, демонстрирующие уменьшение тени при их нарушении.

На защиту выносятся следующие научные положения:

1. Вещество Хагедорна может быть источником регулярной чёрной дыры.
2. Геометрические деформации регулярных чёрных дыр могут привести к формированию модифицированных регулярных решений.
3. Испарение регулярной чёрной дыры завершается образованием регулярного объекта без горизонтов.
4. Горизонт видимости является светоподобной поверхностью тогда и только тогда, когда он совпадает с горизонтом энергетических условий.
5. Гравитационный коллапс баротропной материи при её переходе в излучение или кварк-глюонную плазму может приводить к образованию регулярных чёрных дыр.
6. Энергия электромагнитного излучения, возникающего при фазовых переходах в процессе коллапса, зависит только от свойств исходной баротропной материи и нового состояния вещества.
7. При выполнении светоподобных энергетических условий увеличение массы чёрной дыры всегда сопровождается увеличением её тени; при их нарушении — тень уменьшается.
8. Нейтрализация избыточного электрического заряда чёрной дыры приводит к увеличению размеров её тени.

Проведённые исследования носят фундаментальный характер и вносят вклад в развитие современной теоретической физики и астрофизики. Полученные результаты позволяют:

- Объяснить природу регулярных чёрных дыр и предложить физически обоснованные механизмы их формирования.

- Заложить основу для дальнейших исследований регулярных чёрных дыр, включая вопросы их стабильности, эволюции и взаимодействия с окружающей средой.
- Предложить возможное решение парадокса потери информации за счёт анализа процессов испарения чёрных дыр с регулярным центром.
- Установить связь между динамикой чёрных дыр и наблюдаемыми высокоэнергетическими явлениями, такими как космические лучи.

Модель гравитационного коллапса вещества, которое при критических плотностях переходит в излучение, представляет собой новый подход к пониманию формирования регулярных чёрных дыр. Исследования свойств теней позволили разработать несколько новых аналитических методов, применимых к широкому классу сферически-симметричных и вращающихся чёрных дыр. Предложенный метод построения тени динамической чёрной дыры в случае медленной аккреции является первым аналитическим подходом к этой задаче.

С 2019 года, благодаря проекту Event Horizon Telescope, стало возможным непосредственно наблюдать тени чёрных дыр. Разработанные в диссертации методы построения теней чёрных дыр с учётом наличия аккреционного диска и динамических эффектов обеспечивают прочную связь между теоретическими моделями и наблюдательными данными.

Результаты, полученные в области регулярных чёрных дыр, указывают на наличие фазовых переходов, аналогичных тем, которые происходили в ранней Вселенной. Такие процессы должны сопровождаться мощными энергетическими выбросами, что делает их потенциально наблюдаемыми. Это открывает возможность экспериментальной проверки гипотезы о реальном существовании регулярных чёрных дыр

Связь темы с планом научных работ: Научная работа была выполнена в рамках следующих грантов

- Грант РФФИ №22-22-00112

Наименование проекта: Гипотеза сверхтяжёлых частиц тёмной материи и её следствия в физике высоких энергий вблизи чёрных дыр и в ранней Вселенной;

- Грант РФФ №18-02-00461

Наименование проекта: Вращающиеся чёрные дыры как источники частиц высокой энергии

- Грант фонда "Базис" №23-1-3-33-1

Наименование проекта: Тень черной дыры.

Апробация работы. Материалы диссертации апробированы на следующих конференциях и семинарах:

2024 Seminar at Universidad de Alicante, 04 dec. 2024,

Talk: The problem of regular black hole formation.

2024 RUSGRAV-18, Kazan Federal University, Kazan, Russia. 25-29 nov 2024,

Talk: Models of formation and evaporation of regular black holes.

2024 STC - 2024, Bauman Moscow State Technical University, Russia; Birla Institute of Technology and Science, India. 02-07 nov 2024,

talk: Regular Dynamical Black Holes: Apparent Horizons, Energy Conditions, Formation and Evaporation

2024 CSG-2024, Khazar University, 19-23 August 2024, Baku, Azerbaijan

Talk: The influence of minimal geometrical deformations on black hole shadow

2024 Fifth IUCSS Summer School and Workshop on the Lorentz- and CPT-violating Standard-Model Extension May 10-19, 2024 Indiana University, Bloomington, USA

Talk: General Approach on Shadow Radius and Photon Spheres in Asymptotically Flat Spacetimes and the Impact of Mass-Dependent Variations

2024 Workshop at Eastern Mediterranean University, Famagusta, North Cyprus, 27 april 2024

Talk: Dynamical black holes: gravitational collapse, shadow and horizons

2023 PIRT-2023, BSTU, Moscow, Russia, 03-07 july, 2023

Talk: Regular Black Hole by Gravitational Decoupling.

- 2023 PIRT-2023, BSTU, Moscow, Russia, 03-07 july, 2023
Talk: Surrounded Generalized Vaidya Spacetime with Cosmological Fields.
- 2022 VII International Conference MQFT-2022, 10-14 october 2022 **Talk:** Vaidya and Generalised Vaidya Spacetimes by Gravitational Decoupling.
- 2022 VII International Conference MQFT-2022, 10-14 october 2022 **Talk:** Horizons in Generalised Vaidya Spacetime.
- 2022 VII International Conference MQFT-2022, 10-14 october 2022 **Talk:** Penrose Process in Charged Vaidya Spacetime.
- 2022 The Multifaceted Universe: Theory and Observations - 2022
Talk: Some Mathematical and Physical Aspects of Gravitational Collapse of Massive Stars.
- 2021 PARC-2021 online conference, BITS-Pilani, India, 26-28 October,
Talk: Non-linearity and asphericity of Vaidya spacetime and forces in the naked singularity.
- 2021 PARC-2021 online conference, BITS-Pilani, India, 26-28 October,
Talk: Forces for the particles with negative and zero energy in Kerr metric.
- 2021 PARC-2021 online conference, BITS-Pilani, India, 26-28 October,
Talk: Globally visible singularities formed due to gravitational collapse
- 2021 PIRT-2021, BSTU, Moscow, Russia, 05-09 july 2021
Talk: Forces in Schwarzschild, Vaidya and generalized Vaidya spacetimes.
- 2020 International Conference "RUSGRAV-17" ,
Talk: The Structure of Generalized Vaidya Spacetime Containing the Naked Singularity.
- 2019 International workshop , India , Charusat University ,
Talk: Models of Gravitational Collapse

Основное содержание и результаты диссертации отражены в следующих публикациях:

1. Vitalii Vertogradov, Gravitational Collapse and Formation of Regular Black Holes: Dymnikova, Hayward, and Beyond. *Eur. Phys. J. C* 85, 839 (2025) arXiv:2504.19292 [gr-qc]
2. V. Vertogradov, A. Övgün, Regular Black Hole Models in the Transition from Baryonic Matter to Quark Matter. *JCAP*06(2025)051 DOI 10.1088/1475-7516/2025/06/051 arXiv:2504.07561 [gr-qc]
3. Vitalii Vertogradov, Ali Övgün, Daniil Shatov, Formation of regular black hole from baryonic matter. *Chin. Phys. C* 49, no.11,115103 (2025) doi:10.1088/1674-1137/ade95c arXiv:2502.00521 [gr-qc]
4. Vitalii Vertogradov, Regular Black Hole from gravitational collapse of dust and radiation. *Physics of the Dark Universe*, Volume 48, 2025, 101881, ISSN 2212-6864, arXiv:2501.13739 [gr-qc]
5. Vitalii Vertogradov, Dynamical Black Holes: Apparent Horizon Versus Energy Conditions. *Physics Letters B*, 867, 2025, 139607 arXiv:2410.10582 [gr-qc]
6. V. Vertogradov, A. Övgün, Exact Regular Black Hole Solutions with de Sitter Cores and Hagedorn Fluid. 2025 *Class. Quantum Grav.* 42 025024 [arXiv:2408.02699 [gr-qc]]
7. M. Misyura, A. Rincon, V. Vertogradov, Non-singular black hole by gravitational decoupling and some thermodynamic properties. *Physics of the Dark Universe* 46(9):101717 (2024). [arXiv:2405.05370 [gr-qc]]
8. V. Vertogradov, A. Övgün, R.C. Pantig, Analyzing the Influence of Geometrical Deformation on Photon Sphere and Shadow Radius: A New Analytical Approach -Stationary, and Axisymmetric Spacetime. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* 2 (2025) 2540001 [arXiv:2405.05077 [gr-qc]]
9. V. Vertogradov, M. Misyura, P. Bambhaniya, Influence of primary hair and plasma on intensity distribution of black hole shadows. *Eur. Phys. J. Plus* (2025) 140:23 [arXiv:2403.16743 [gr-qc]]

10. Heydarzade, Y., Vertogradov, V. Dynamical photon spheres in charged black holes and naked singularities. *Eur. Phys. J. C* 84, 582 (2024)
11. V. Vertogradov, A. Övgün, General Approach on Shadow Radius and Photon Spheres in Asymptotically Flat Spacetimes and the Impact of Mass-Dependent Variations. *Physics Letters B* 854, 138758 (2024)
12. V. Vertogradov, Övgün, Analyzing the Influence of Geometrical Deformation on Photon Sphere and Shadow Radius: A New Analytical Approach – Spherically Symmetric Spacetimes. *Phys.Dark Univ.* 45, 101541 (2024)
13. V. Vertogradov, The generalized Vaidya spacetime with polytropic equation of state. *General Relativity and Gravitation* (2024) 56:59
14. Pryadilin T. R., Zhitov D. V., Vertogradov V. D., On particle collisions in the vicinity of the charged black holes // *Gravitation and Cosmology*. - 2024. - Volume 30, Issue 1. - P. 48-56.
15. V. Vertogradov and D. Kudryavcev, Generalized vaidya spacetime: horizons, conformal symmetries, surface gravity and diagonalization, *Modern Physics Letters A*, p. 2350119, 2023.
16. Vitalii Vertogradov, Extraction Energy From Charged Vaidya Black Hole Via Penrose Process. *Commun. Theor. Phys.* 75 045404 (2023)
17. Vitalii Vertogradov, The structure of the generalized Vaidya spacetime containing the eternal naked singularity. *International Journal of Modern Physics A* Vol. 37, No. 28n29, 2250185 (2022)
18. V. Vertogradov, V. Dubrovich. Some mathematical and physical aspects of the gravitational collapse of massive stars // *Proceedings of The Multifaceted Universe: Theory and Observations*, 425, 042, 2022
19. Dipanjan Dey, Karim Mosani, Pankaj Joshi, Vitalii Vertogradov. Causal structure of singularity in non-spherical gravitational collapse. *Eur. Phys. J. C* 82, 431 (2022).

20. Vitalii Vertogradov. The negative energy in generalized vaidya spacetime. *Universe* 2020, 6(9), 155;
21. Vitalii Vertogradov. The eternal naked singularity formation in the case of gravitational collapse of generalized Vaidya space-time. *International Journal of Modern Physics A* Vol. 33, No. 17, 1850102 (2018)

Личный вклад автора в опубликованные научные статьи

Ниже представлен анализ личного вклада автора в научные статьи, опубликованные в соавторстве. Во всех работах автор принимал непосредственное участие в постановке задачи, проведении аналитических расчётов и подготовке текста публикаций. Ниже указан характер вклада по каждой статье.

1. **V. Vertogradov, A. Övgün**, *Regular Black Hole Models in the Transition from Baryonic Matter to Quark Matter*, *JCAP* **06** (2025) 051.
 Автором сформулирована научная задача и выполнены все аналитические расчёты. Основная часть текста статьи написана автором, с последующим обсуждением и редактированием совместно с соавтором.
2. **Vitalii Vertogradov, Ali Övgün, Daniil Shatov**, *Formation of regular black hole from baryonic matter*, *Chin. Phys. C* **49**, no. 11, 115103 (2025).
 Идея исследования и постановка задачи принадлежат автору. Аналитические расчёты и интерпретация результатов выполнены автором при обсуждении с соавторами. Черновик статьи подготовлен автором, окончательная редакция — в сотрудничестве.
3. **V. Vertogradov, A. Övgün**, *Exact Regular Black Hole Solutions with de Sitter Cores and Hagedorn Fluid*, *Class. Quantum Grav.* **42** (2025) 025024 [arXiv:2408.02699 [gr-qc]].
 Автором предложена концепция исследования и полностью проведены аналитические расчёты. Черновик статьи написан автором, статья дорабатывалась совместно с соавтором.
4. **M. Misyura, A. Rincon, V. Vertogradov**, *Non-singular black hole by gravitational decoupling and some thermodynamic properties*, *Phys. Dark Univ.* **46** (2024) 101717 [arXiv:2405.05370 [gr-qc]].

Постановка задачи и аналитическое исследование выполнены автором. Черновик статьи подготовлен автором. Соавторы участвовали в обсуждении результатов и финальной редакции текста.

5. **V. Vertogradov, A. Övgün, R.C. Pantig**, *Analyzing the Influence of Geometrical Deformation on Photon Sphere and Shadow Radius: A New Analytical Approach – Stationary, and Axisymmetric Spacetime*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **2** (2025) 2540001.

Аналитические расчёты и математическая интерпретация выполнены автором. Черновик статьи написан автором. Соавторы внесли вклад в проведении численных расчетов и редактирование текста.

6. **V. Vertogradov, M. Misyura, P. Bambhaniya**, *Influence of primary hair and plasma on intensity distribution of black hole shadows*, Eur. Phys. J. Plus **140** (2025) 23.

Автором сформулирована научная задача, проведены все аналитические расчёты и полностью написан текст статьи. Работа выполнена под научным обсуждением с соавторами, которыми также были выполнены численные расчеты.

7. **Heydarzade, Y., Vertogradov, V.**, *Dynamical photon spheres in charged black holes and naked singularities*, Eur. Phys. J. C **84** (2024) 582.

Автором предложена концепция исследования, выполнены аналитические расчёты и подготовлен черновик статьи. Окончательная формулировка результатов и текста проведена совместно с соавтором.

8. **V. Vertogradov, A. Övgün**, *General Approach on Shadow Radius and Photon Spheres in Asymptotically Flat Spacetimes and the Impact of Mass-Dependent Variations*, Phys. Lett. B **854** (2024) 138758.

Постановка задачи и аналитические расчеты работы выполнены автором. Черновик статьи написан автором, доработка текста — в сотрудничестве с соавтором.

9. **V. Vertogradov, Övgün**, *Analyzing the Influence of Geometrical Deformation on Photon Sphere and Shadow Radius: A New Analytical Approach – Spherically Symmetric Spacetimes*, Phys. Dark Univ. **45** (2024)

101541.

Автором разработана концепция исследования и проведены все аналитические расчёты. Черновик статьи подготовлен автором, соавтор участвовал в обсуждении и редактировании.

10. **Pryadilin T. R., Zhitov D. V., Vertogradov V. D.**, *On particle collisions in the vicinity of the charged black holes*, *Gravit. Cosmol.* **30** (2024) 48–56.

Идея исследования и постановка задачи принадлежат автору. Аналитические расчёты и интерпретация результатов выполнены в равной мере с соавторами. Черновик статьи подготовлен автором.

11. **V. Vertogradov, D. Kudryavcev**, *Generalized Vaidya spacetime: horizons, conformal symmetries, surface gravity and diagonalization*, *Mod. Phys. Lett. A* **38** (2023) 2350119.

Автором сформулирована научная задача и написан основной текст статьи. Аналитические расчёты выполнены автором совместно с соавтором, внесшим предложения по математической интерпретации.

12. **V. Vertogradov, V. Dubrovich**, *Some mathematical and physical aspects of the gravitational collapse of massive stars*, в сб.: *The Multifaceted Universe: Theory and Observations, Proceedings*, **425** (2022) 042.

Автором выполнены все аналитические расчёты и подготовлен полный текст статьи. Работа основана на совместных научных дискуссиях с соавтором.

13. **Dipanjan Dey, Karim Mosani, Pankaj Joshi, Vitalii Vertogradov**, *Causal structure of singularity in non-spherical gravitational collapse*, *Eur. Phys. J. C* **82** (2022) 431.

Автором выполнена часть аналитических расчётов. Общая концепция и интерпретация результатов обсуждались в коллективе, черновик статьи готовился ведущим соавтором.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Полный объем составляет 230 страниц и список литературы (241 источник).

Глава 1

Статичные регулярные черные дыры

1.1 Регулярные черные дыры

В 1916 году Карл Шварцшильд решил уравнения Эйнштейна для случая сферической симметрии и вакуума. Полученное им решение, как выяснилось позже, описывает черную дыру. Это решение получило название *метрики Шварцшильда*, которая в координатах Бойера–Линдквиста $\{t, r, \theta, \varphi\}$ имеет следующий вид¹:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.1)$$

где M — масса черной дыры (параметр решения), а $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ — метрика единичной двумерной сферы.

Метрика Шварцшильда (1.1) обладает двумя особенностями:

- Горизонт событий на радиусе $r = 2M$. Как видно из выражения (1.1), компонента метрического тензора g_{rr} становится сингулярной на этой поверхности. Однако эта особенность является координатной и связана с выбором системы координат. При помощи подходящих координат пространство-время можно продолжить внутрь горизонта событий.

¹В данной работе, если не указано иное, используется геометризованная система единиц, в которой скорость света c и гравитационная постоянная G положены равными единице: $c = 8\pi G = 1$.

- Сингулярность при $r = 0$. Эта особенность не зависит от выбора координат и указывает на физическую сингулярность, где кривизна пространства-времени, а также другие физические величины, стремятся к бесконечности.

Необходимо отметить, что обращение в бесконечность отдельных компонент метрического тензора ещё не свидетельствует о существовании истинной физической сингулярности. Для определения характера особенности следует рассмотреть скаляры кривизны, такие как скаляр Риччи R , квадрат тензора Риччи $S = R_{ik}R^{ik}$ и скаляр Кречмана $K = R_{iklm}R^{iklm}$.

Поскольку метрика Шварцшильда (1.1) описывает пустое пространство-время ($T_{ik} = 0$), то скаляр Риччи R и квадрат тензора Риччи S тождественно равны нулю. Ненулевым остаётся лишь скаляр Кречмана, который принимает вид:

$$K = \frac{48M^2}{r^6}. \quad (1.2)$$

Из выражения для скаляра Кречмана следует, что при $r \rightarrow 0$ он стремится к бесконечности:

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \infty. \quad (1.3)$$

Это указывает на наличие неустранимой физической сингулярности в центре черной дыры.

Тем не менее, особенность на горизонте событий $r = 2M$ не является истинной сингулярностью. Это подтверждается конечностью скаляра Кречмана на этой поверхности:

$$\lim_{r \rightarrow 2M} K = \frac{3}{4M^4}. \quad (1.4)$$

Таким образом, особенность метрики Шварцшильда на горизонте событий является координатной и может быть устранена подходящим выбором координат.

Метрика Шварцшильда описывает идеализированный случай статической черной дыры в вакууме. Однако реальные астрофизические черные дыры, как правило, окружены аккреционным диском и взаимодействуют с окружающей материей. Это требует учета ненулевого тензора энергии-импульса в

правой части уравнений Эйнштейна. Возникает естественный вопрос: существует ли в этом случае решение, свободное от центральной сингулярности?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим общий вид сферически-симметричной метрики, которая включает в себя как частные случаи метрику Шварцшильда, так и другие решения, учитывающие наличие материи. Без ограничения общности такую метрику можно записать в следующем виде:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M(r)}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M(r)}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.5)$$

где $M(r)$ — это массовая функция, зависящая от радиальной координаты r . В отличие от постоянной массы M в метрике Шварцшильда, здесь $M(r)$ может учитывать не только массу центрального тела, но и другие параметры, такие как электрический заряд или вклады от распределённой материи.

Стоит отметить, что функция $M(r)$ не имеет однозначной интерпретации как масса черной дыры в обычном смысле. Она включает в себя вклады от различных физических полей, окружающих компактный объект. Например, для решения Рейсснера–Нордстрёма, описывающего электрически заряженную сферически-симметричную черную дыру, массовая функция имеет вид:

$$M(r) = M - \frac{Q^2}{2r}, \quad (1.6)$$

где M — гравитационная масса черной дыры, а Q — её электрический заряд.

Можно видеть, что на бесконечности ($r \rightarrow \infty$) массовая функция Рейсснера–Нордстрёма переходит в массу Шварцшильда:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} M(r) = M. \quad (1.7)$$

В общем случае, если мы требуем, чтобы пространство-время было асимптотически плоским, необходимо выполнение условия

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g_{00} = -1, \quad (1.8)$$

то массовая функция должна стремиться к постоянной массе черной дыры на бесконечности.

Зависимость массовой функции $M(r)$ от радиальной координаты r приводит к тому, что тензор энергии-импульса T_{ik} , входящий в уравнения Эйнштейна, становится ненулевым. Мы предположим, что материя описывается

тензором энергии-импульса, соответствующим анизотропной жидкости, который имеет следующий вид:

$$T_{ik} = (\rho + p_2)u_i u_k + (p_1 - p_2)x_i x_k + p_2 g_{ik}, \quad (1.9)$$

где ρ — плотность энергии, измеренная сопутствующим наблюдателем, p_1 и p_2 — радиальная и тангенциальная компоненты давления соответственно, u^i — 4-скорость жидкости, а x^i — пространственноподобный единичный вектор, ортогональный u^i .

Сферическая симметрия и вид метрики (1.5) приводят к тому, что тензор Эйнштейна G_k^i обладает следующими соотношениями между компонентами:

$$G_0^0 = G_1^1, \quad G_2^2 = G_3^3. \quad (1.10)$$

Аналогичные соотношения выполняются и для компонент тензора энергии-импульса:

$$T_0^0 = T_1^1 = -\rho = p_1, \quad T_2^2 = T_3^3 = p_2. \quad (1.11)$$

В дальнейшем, вместо тангенциальной компоненты давления p_2 , мы будем использовать обозначение $P = p_2$ и называть её просто давлением. Радиальную компоненту p_1 будем опускать, подразумевая выполнение условия $p_1 = -\rho$.

Выписывая уравнения Эйнштейна, мы приходим к следующей системе двух линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{2M'}{r^2}, \\ P &= -\frac{M''}{r}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Для того чтобы выяснить, может ли зависимость $M(r)$ от радиальной координаты r привести к отсутствию сингулярности в центре, необходимо выразить инварианты кривизны через массовую функцию $M(r)$. Эти инварианты имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} R &= \frac{4M' + 2rM''}{r^2}, \\ S &= \frac{8M'^2 + 2r^2M''^2}{r^4}, \\ K &= \frac{48M^2 - 64rMM' + 32r^2M'^2 + 16r^2MM'' - 16r^3M'M'' + 4r^4M''^2}{r^6} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Можно переписать инварианты кривизны (1.13) через плотность энергии и давление, используя соотношения (1.12):

$$\begin{aligned} R &= 2\rho - 2P, \\ S &= 2\rho^2 + 2P^2, \\ K &= \frac{48M^2}{r^6} - \frac{16M}{r^3}(2\rho - P) + 8\rho^2 - 8\rho P + 4P^2. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Непосредственно из этих выражений видно, что для отсутствия сингулярности в центре ($r \rightarrow 0$) необходимо удовлетворить следующим трём условиям:

- $\lim_{r \rightarrow 0} M(r) = 0$;
- $\lim_{r \rightarrow 0} \rho(r) = \rho_0 = \text{const.}$;
- $\lim_{r \rightarrow 0} P(r) = P_0 = \text{const.}$.

Таким образом, мы должны найти такое решение уравнений, при котором плотность энергии и давление остаются конечными в центре ($r \rightarrow 0$), а массовая функция $M(r)$ обращается в ноль.

Однако Роджер Пенроуз доказал знаменитую теорему о сингулярностях [12], согласно которой гравитационный коллапс при выполнении сильных энергетических условий обязательно приводит к образованию сингулярности, как только формируется горизонт видимости. Следовательно, чтобы избежать образования сингулярности в центре черной дыры, необходимо отказаться от выполнения сильного энергетического условия, которое предполагает, что гравитация является силой притяжения.

В природе нарушение сильного энергетического условия уже наблюдается — за это ответственна так называемая темная энергия, вызывающая ускоренное расширение Вселенной.

Первая модель несингулярной черной дыры, или, как их ещё называют, *регулярной черной дыры*, была получена Джеймсом Бардиным в 60-х годах прошлого века [18]. Эта метрика включает параметр g , препятствующий образованию сингулярности. В сферических координатах $\{t, r, \theta, \varphi\}$ метрика

Бардина имеет вид:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2d\Omega^2, \\ f(r) &= 1 - \frac{2Mr^2}{(r^2 + g^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Стоит отметить, что при $M = 0$ эта метрика описывает плоское пространство-время, а при $g = 0$ переходит в метрику Шварцшильда (1.1). Массовая функция для метрики Бардина принимает вид:

$$M(r) = \frac{Mr^3}{(r^2 + g^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.16)$$

Как видно, на бесконечности ($r \rightarrow \infty$) массовая функция $M(r)$ стремится к постоянному значению M . Зная её явный вид, можно вычислить плотность энергии и давление вещества, соответствующего данной метрике, используя соотношения (1.12):

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{6Mg^2}{(g^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}}, \\ P &= -\frac{6g^2(g^2 - \frac{3r^2}{2})M}{(g^2 + r^2)^{\frac{7}{2}}}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Заметим, что в центре ($r \rightarrow 0$) плотность энергии и давление принимают конечные значения:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \rho(r) &= \frac{6M}{g^3}, \\ \lim_{r \rightarrow 0} P(r) &= -\frac{6M}{g^3}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Соответственно, скаляр Риччи и квадрат тензора Риччи также остаются конечными:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} R &= \frac{24M}{g^3}, \\ \lim_{r \rightarrow 0} S &= \frac{144M^2}{g^6}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Из выражения для массовой функции видно, что она обращается в ноль в центре ($r = 0$), следовательно, все условия для существования регулярного

центра выполнены. Таким образом, метрика Бардина (1.15) действительно описывает регулярную черную дыру.

Для полноты анализа рассмотрим поведение скаляра Кречманна в центре:

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \frac{96M^2}{g^6}. \quad (1.20)$$

Этот результат подтверждает, что скаляр Кречманна конечен, что исключает наличие истинной физической сингулярности в центре.

Отметим, что решение Бардина было получено не путём решения уравнений Эйнштейна с конкретной материей, а построено феноменологически на основе заданной массовой функции. Лишь спустя три десятилетия было установлено, что источником этой метрики может служить нелинейная электродинамика, а параметр g интерпретируется как магнитный монополь [19].

1.2 Регулярные чёрные дыры и нелинейная электродинамика

В 90-е годы стало очевидно, что некоторые регулярные чёрные дыры имеют в качестве источника нелинейную электродинамику [19]. Было показано, что многие решения, такие как метрика Бардина или метрика Хэйворда [30], речь о которой пойдёт ниже, в качестве параметра регуляризации содержат магнитный монополь. В статьях Бронникова [25,51] было продемонстрировано, что при рассмотрении нелинейной электродинамики необходимо учитывать только магнитные поля, так как наличие электрического поля неизбежно приводит к образованию сингулярности. Применение нелинейной электродинамики к проблеме регулярных чёрных дыр стало популярным в наше время [26, 27]. Однако, как будет показано в следующем параграфе, такие чёрные дыры имеют ряд недостатков:

- Реальные астрофизические чёрные дыры, которые образуются в результате гравитационного коллапса звёзд, считаются нейтральными; если избыток заряда накапливается, то он быстро нейтрализуется за счёт аккреции.

- Все регулярные чёрные дыры, чьим источником является нелинейная электродинамика, в качестве параметра регуляризации имеют магнитный за-

ряд. При стремлении этого заряда к нулю кривизна пространства-времени в центре неограниченно возрастает, что приводит к образованию сингулярности. Как будет показано ниже, не только нейтрализация чёрной дыры может привести к образованию сингулярности, но также и так называемый эффект Пенроуза для заряженных частиц, который позволяет извлекать энергию из заряженных чёрных дыр за счёт исчерпания их заряда, что также приводит к образованию сингулярности в центре.

- Большинство известных решений, описывающих регулярные чёрные дыры, источником которых является нелинейная электродинамика, не вводят лагранжиан теории сначала, а подбирают вид метрики, которая описывает регулярную чёрную дыру, и уже на её основе строят лагранжиан теории. Поскольку в нелинейной электродинамике лагранжиан произвольным образом зависит от инвариантов поля, такой лагранжиан всегда можно найти [28]. Однако нет физического обоснования для такой теории.

В этом параграфе будет описана общая схема получения лагранжиана нелинейной электродинамики, исходя из вида метрики.

Рассмотрим теории нелинейной электродинамики, описываемые плотностью Лагранжа $\mathcal{L} = \mathcal{L}(G, F)$, которая зависит от двух инвариантов электромагнитного поля F и G :

$$\begin{aligned} F &= F_{ik}F^{ik}, \\ G &= {}^*F_{ik}F^{ik}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Здесь F_{ik} — тензор электромагнитного поля, а символ $*$ обозначает оператор *звезды Ходжа*.

Предположим, что пространство-время имеет следующий вид:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1.22)$$

Кроме того, будем считать, что электромагнитное поле обладает теми же симметриями, что и само пространство-время. Тогда тензор электромагнитного поля можно записать в виде:

$$\mathcal{F} = -E dt \otimes dr + Br^2 \sin \theta d\theta \otimes d\varphi, \quad (1.23)$$

где символ \otimes обозначает внешнее произведение дифференциальных 1-форм.

Используя выражение для тензора электромагнитного поля (1.23) и определения инвариантов поля (см. (1.21)), нетрудно получить явные выражения для скалярных инвариантов F и G :

$$\begin{aligned} F &= 2B^2 - 2E^2, \\ G &= 4EB. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Зная вид тензора электромагнитного поля (1.23) и принимая во внимание общую структуру функции Лагранжа нелинейной электродинамики, можно записать обобщённые уравнения Максвелла в следующем виде:

$$\begin{aligned} B &= \frac{g}{r^2}, \\ \mathcal{L}_F E - \mathcal{L}_G B &= -\frac{Q}{4r^2}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

где введены обозначения:

$$\mathcal{L}_F \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F}, \quad \mathcal{L}_G \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G}. \quad (1.26)$$

Здесь g и Q — магнитный и электрический заряды чёрной дыры соответственно.

Действие системы в целом состоит из двух частей:

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_{eh} + \mathcal{I}_{ned}, \quad (1.27)$$

где \mathcal{I}_{eh} — действие Эйнштейна–Гильберта:

$$\mathcal{I}_{eh} = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{R}{2}, \quad (1.28)$$

а \mathcal{I}_{ned} — действие нелинейной электродинамики:

$$\mathcal{I}_{ned} = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}(F, G). \quad (1.29)$$

Вариация действия \mathcal{I}_{eh} и \mathcal{I}_{ned} приводит к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} -\frac{M'}{r^2} &= \mathcal{L} - \frac{QE}{r^2}, \\ -\frac{M''}{2r} &= \mathcal{L} - \frac{4g^2}{r^4} \mathcal{L}_F - \mathcal{L}_G G. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Существует два основных подхода к решению системы уравнений (1.25):

1. Можно задать конкретную теорию, то есть выбрать явный вид лагранжиана $\mathcal{L}(F, G)$. После этого система уравнений позволяет найти массовую функцию $M(r)$ и геометрию пространства-времени, соответствующую данной конфигурации поля.
2. Альтернативный подход заключается в том, чтобы предложить вид метрики, удовлетворяющей физическим требованиям (например, регулярности), а затем восстановить вид лагранжиана $\mathcal{L}(F, G)$, который порождает такую метрику. Большинство известных решений для регулярных чёрных дыр получено именно этим способом.

Мы не будем здесь подробно останавливаться ни на одном из этих методов, поскольку, как уже было отмечено ранее, регулярные чёрные дыры с источником в виде нелинейной электродинамики не являются устойчивыми и неизбежно приходят к образованию сингулярности под действием эффекта Пенроуза для заряженных частиц.

Ещё одной серьёзной проблемой, связанной с использованием нелинейной электродинамики, является то, что многие полученные решения нарушают не только сильное энергетическое условие, но также слабое и доминантное энергетические условия. Напомним, что:

- Слабое энергетическое условие требует неотрицательности плотности энергии для любого наблюдателя;
- Доминантное энергетическое условие утверждает, что поток энергии должен быть времениподобным или светоподобным.

В рамках настоящей работы мы не будем рассматривать модели, нарушающие эти условия, поскольку такие теории представляются нам нефизическими и интересными лишь с формально-математической точки зрения.

1.3 Неустойчивость заряженных черных дыр. Эффект Пенроуза для заряженных частиц

Возможность извлекать энергию из вращающейся черной дыры была впервые предсказана Роджером Пенроузом [109]. В отличие от статических черных дыр, вращающаяся черная дыра обладает так называемым *пределом*

статичности — поверхностью, вне которой возможно существование статических наблюдателей. Эта поверхность располагается вне горизонта событий и касается его на полюсах $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Область пространства-времени между пределом статичности и горизонтом событий называется *эргосферой*.

В этой области вектор Киллинга $\frac{\partial}{\partial t}$, соответствующий временной симметрии, становится пространственно-подобным. Это приводит к тому, что движение внутри эргосферы возможно только сопутствующим образом — то есть с вращением вокруг черной дыры. Более того, параметр, играющий роль энергии вне предела статичности, в эргосфере может принимать отрицательные значения. Именно это свойство позволяет извлекать вращательную энергию из черной дыры.

Позднее Руфини [110] обобщил этот эффект на случай движения заряженных частиц в поле заряженной черной дыры Рейсснера–Нордстрёма. Он ввёл понятие *обобщённой эргосферы* — поверхности, внутри которой заряженная частица может иметь отрицательную энергию. Однако между классической эргосферой (в метрике Керра) и обобщённой существует важное различие: в случае Керра эргосфера является геометрическим свойством самого пространства-времени и не зависит от характеристик частиц. В свою очередь, обобщённая эргосфера полностью определяется свойствами самой частицы, а именно её зарядом. Это означает, что для частиц с разными зарядами будут существовать различные области, в которых они могут обладать отрицательной энергией.

Несмотря на это, механизм извлечения энергии остаётся возможным и реализуется за счёт исчерпания заряда черной дыры. Существование аналога эффекта Пенроуза для заряженных частиц в динамических черных дырах было также доказано в работе [107].

Поскольку регулярная черная дыра, источником которой является нелинейная электродинамика, обладает зарядом, можно ожидать существования аналогичного эффекта и для таких черных дыр. Для примера рассмотрим черную дыру Бардина, вид метрики которой был представлен ранее (1.15).

Метрика Бардина допускает два вектора Киллинга: $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\partial}{\partial \varphi}$, что соответствует наличию двух сохраняющихся величин — удельной энергии E и удельного момента количества движения L .

Лагранжиан заряженной частицы, движущейся в экваториальной плоскости $\theta = \frac{\pi}{2}$ в поле черной дыры с потенциалом

$$A_i = \phi(g, r)\delta_i^t, \quad (1.31)$$

имеет следующий вид [111]:

$$2\mathcal{L} = -f \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + f^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 - 2qA_\alpha \frac{dx^\alpha}{d\lambda}. \quad (1.32)$$

Где $\varphi(g, r)$ - скалярный потенциал поля монополя, который мы пока рассмотрим в общем случае. Единственные условия, которые мы на него наложим - это обращение на бесконечности в ноль

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(g, r) = 0, \quad (1.33)$$

и монотонный характер убывания

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} \leq 0. \quad (1.34)$$

В литературе встречаются различные значения потенциала ϕ для поля монополя метрики Бардина. Мы рассмотрим в последствии два из них:

$$\phi = \frac{g}{r}, \quad (1.35)$$

$$\phi = \frac{g^2}{r^2 + g^2} \quad (1.36)$$

Из лагранжиана легко получаются удельная энергия E и удельный момент количества движения L [112]

$$E = f \frac{dt}{d\lambda} + q\phi, \quad (1.37)$$

$$L = r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda}. \quad (1.38)$$

Здесь λ - аффинный параметр. Используя (1.37) и (1.38) в условии времени подобного движения $g_{ik}u^i u^k = -1$, находим радиальную компоненту 4-скорости

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 &= Z, \\ Z &= X^2 - f \left(\frac{L^2}{r^2} + 1 \right), \\ X &= E - q\phi. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Отметим, что, поскольку мы рассматриваем движение заряженных частиц в поле, то траекторией этих частиц, очевидно, не будет являться геодезическая, т.к. она подразумевает под собой свободное движение. Мы хотим знать возможно ли существование заряженных частиц с отрицательной энергией вне горизонта событий черной дыры Бардина. Выражаем энергию из (1.39)

$$E = q\phi + \sqrt{f \left(\frac{L^2}{r^2} + 1 \right) + \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2}. \quad (1.40)$$

Решение с минусом перед корнем опущено в виду того, что мы требуем положительности энергии на бесконечности. Как видно из (1.40), минимальная энергия достигается когда $L = 0$ и $\frac{dr}{d\lambda} = 0$ и мы находим

$$E = q\phi + \sqrt{f}. \quad (1.41)$$

Отсюда видно, что E может принимать отрицательные значения только если заряд частицы q противоположен знаку потенциала ϕ ($q\phi < 0$). Например для потенциала (1.35) подобное условие приводит к тому, что электрический заряд частицы и заряд монополя должны быть противоположны по знаку. Без потери общности, мы можем предположить, что заряд частицы отрицателен $q < 0$. Более того, частица с отрицательной энергией может располагаться в области пространства-времени ограниченной поверхностью, которая дается следующим уравнением

$$-q\phi(g, r_E) = \sqrt{f(r_E)}. \quad (1.42)$$

Эта поверхность и называется обобщенной эргосферой. Как видно из определения, размеры обобщенной эргосферы зависят от свойств частицы. Как упоминалось выше, это приводит к тому, что разные заряженные частицы с отрицательной энергией обладают различными областями где они могут существовать.

Рассмотрим теперь движение заряженных частиц в обобщенной эрго-области. Мы предполагаем условие движения вперед по времени $X \geq 0$. Также, очевидно, что частица с отрицательной энергией не может достичь бесконечности, поскольку, тогда $X < 0$. В связи с этим, внутри обобщенной эргосферы (1.42) должна существовать поворотная точка. Теперь, мы

докажем, что существует только одна поворотная точка. Это утверждение означает, что траектории для подобных частиц появляются в обобщенной эргообласти из под гравитационного радиуса, что согласуется с аналогичными результатами для метрики Керра [113–116], заряженного Вайдья [107] и Рейсснера-Нордстрема [117].

Введем следующие обозначения: поворотную точку мы будем обозначать индексом tp , т.е. r_{tp} , внешний горизонт событий через r_+ . Вторая поворотная точка в обобщенной эргообласти отсутствует, если в области $r_+ \leq r \leq r_{tp}$, величина

$$\frac{Z'}{2} = b \frac{L^2}{r^3} + X'X - \frac{f'}{2}, \quad (1.43)$$

отрицательна, где

$$b = f - \frac{r f'}{2}. \quad (1.44)$$

$f' > 0$ в области $r_+ \leq r \leq r_{tp}$, т.е.

$$\begin{aligned} f(r) &= 1 - \frac{2Mr^2}{(r^2 + g^2)^{\frac{3}{2}}} = 1 - \frac{2M(r)}{r}, \\ f'(r) &= \frac{2}{r^2} (M - M'r) = M(r) \left(1 - \frac{3g^2}{r^2 + g^2} \right). \end{aligned} \quad (1.45)$$

Поскольку $r = \sqrt{2}g$ - радиус горизонта событий экстремальной черной дыры, который является минимальным, то вне горизонта $f' > 0$ и мы можем заключить из уравнения (1.44), что

$$b \leq f. \quad (1.46)$$

Однако, мы пока ничего не можем сказать про значение b . Если значение отрицательно, то утверждение доказано, поскольку $X' < 0$. Заметим, что выражение для b в точности совпадает с уравнением определения фотон сферы. Поскольку черная дыра Бардина обладает только одной фотон сферой за пределами горизонта событий, то если поворотная точка располагается между фотон сферой и горизонтом событий, то $b < 0$ для любого типа потенциала обладающего указанными выше условиями монотонности и исчезновения на бесконечности. Мы же предположим, что поворотная точка располагается за пределами фотон сферы. Поэтому, мы рассмотрим не тривиальный случай

$b > 0$. Из того, что $Z(r_{tp}) = 0$, мы получаем в области $r_+ \leq r < r_{tp}$

$$\frac{L^2}{r^2} \leq \frac{X^2 - f}{f}. \quad (1.47)$$

Подставляя теперь выражение (1.47) в (1.43), мы находим следующие ограничения

$$\frac{Z'}{2} \leq \frac{\alpha}{rf}. \quad (1.48)$$

Где

$$\alpha = bX^2 - f\beta, \quad (1.49)$$

и

$$\beta = f - X'x. \quad (1.50)$$

Используя (1.46), мы можем наложить следующие ограничения на α

$$\alpha \leq f\gamma. \quad (1.51)$$

Где

$$\gamma = X^2 + X'Xr - f. \quad (1.52)$$

Известно, что в области $r_+ \leq r \leq r_{tp}$, функция $f(r)$ положительна. Более того, из определения обобщенной эргосферы (1.42) следует, что $E - q\phi \leq \sqrt{f}$, но тогда из условия движения вперед по времени $X \geq 0$ и отрицательности энергии $E < 0$, мы приходим к тому, что $\gamma < 0$, поскольку $X^2 - f \leq 0$. Следовательно

$$\gamma < 0 \rightarrow \alpha < 0 \rightarrow \frac{Z'}{2} < 0. \quad (1.53)$$

Что доказывает утверждение о том, что траектория для заряженной частицы в обобщенной эргообласти имеет только одну поворотную точку. Поскольку, мы показали, что в обобщенной эргообласти могут существовать заряженные частицы с отрицательной энергией и что они неизбежно должны падать под горизонт событий черной дыры, рассмотрим возможность извлечения энергии из черной дыры в результате заряженного процесса Пенроуза. Мы предполагаем следующий процесс: отрицательно заряженная частица попадает в обобщенную эргообласть. Там она распадается на две части, одна из которых улетает к наблюдателю находящемуся за пределами обобщенной эргосферы, обладая большей энергией чем изначальная частица, а другая, как показано

выше, обладая отрицательной энергией падает под горизонт событий черной дыры. Обозначим изначальную частицу индексом 0, частицу улетающую к наблюдателю индексом 2, а частицу с отрицательной энергией индексом 1. В экваториальной плоскости, обозначим точку распада через $\{R^*, \varphi^*\}$. Величины, описывающие частицу связаны законами сохранения. Закон сохранения заряда есть

$$q_0 m_0 = q_1 m_1 + q_2 m_2. \quad (1.54)$$

А закон сохранения 4-импульса есть

$$p_0^i = p_1^i + p_2^i. \quad (1.55)$$

Уравнение (1.55) имеет 3 закона сохранения, которые имеют прямое физическое следствие. Временная компонента - это закон сохранения энергии

$$E_0 m_0 = E_1 m_1 + E_2 m_2, \quad (1.56)$$

радиальная компонента соответствует закону сохранения импульса

$$m_0 \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)_0 = m_1 \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)_1 + m_2 \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)_2, \quad (1.57)$$

и, наконец, угловая компонента приводит к закону сохранения момента количества движения

$$m_0 L_0 = m_1 L_1 + m_2 L_2. \quad (1.58)$$

Возведем в квадрат выражение (1.55), помня о том, что $|p_{(a)}^i|^2 = m_{(a)}^2$ и p^i времениподобный и направленный в будущее вектор, мы приходим к неравенству

$$m_0^2 \geq m_1^2 + m_2^2. \quad (1.59)$$

Энергия уносимая частицей 2 согласно (1.56) есть

$$m_2 E_2 = m_0 E_0 - E_1 m_1. \quad (1.60)$$

Это выражение показывает, что $E_2 > E_0$ если $E_1 < 0$. Следовательно, существование частиц с отрицательной энергией, и в случае черной дыры Бардина, приводит к процессу извлечения энергии. Поскольку частица с отрицательной энергией неизбежно упадет в черную дыру, то произойдет уменьшение заряда последней и, следовательно, извлечение энергии происходит

засчет уменьшения заряда черной дыры. Между тем, для физической интерпретации полученных результатов необходимо оценить количество извлекаемой энергии. Напомним, что извлечение энергии из заряженной черной дыры может происходить не только за счёт эффекта Пенроуза для заряженных частиц, но также за счёт так называемого *эффекта Банадоса–Силка–Веста* (BSW) [118], который заключается в том, что столкновение двух частиц вблизи горизонта событий экстремальной черной дыры может приводить к неограниченно большим значениям энергии в системе центра масс.

Этот эффект был впервые обнаружен для вращающихся черных дыр Керра, однако позднее было установлено, что аналогичный механизм реализуется и для заряженных черных дыр, таких как Рейсснера–Нордстрёма [119, 120], а также для черной дыры Бардина [112, 118].

В частности, было показано, что в рамках идеализированной модели отсутствует верхняя граница на извлекаемую энергию из черной дыры Рейсснера–Нордстрёма при использовании BSW-механизма. Однако, как было продемонстрировано в работе [112], если учитывать реальные свойства заряженных частиц (например, их конечные массы и заряды), то количество извлекаемой энергии оказывается крайне малым.

В таблице 1.1 представлены оценки максимальной извлекаемой энергии при BSW-процессе для различных типов частиц. Как видно из таблицы, извлекаемая энергия составляет порядка $\sim 10^{-13}$.

Частица	Масса m/m_e	Заряд q/e
Электрон	1.00×10^0	1
Протон	1.84×10^3	1
α -частица	7.29×10^3	2
${}^{197}_{79}\text{Au}$	3.59×10^5	79

Таблица 1.1: Оценка извлекаемой энергии из черной дыры в результате Банадос-Силк-Вест эффекта. m_e - масса электрона.

Поэтому для оценки физической значимости процесса необходимо рассчитать так называемую *эффективность заряженного процесса Пенроуза* — то есть определить максимально возможное количество энергии, которое может быть извлечено из черной дыры. Эффективность процесса Пенроуза

определяется как:

$$\eta = \frac{m_2 E_2}{m_0 E_0} - 1 = -\frac{m_1 E_1}{m_0 E_0}. \quad (1.61)$$

Для достижения максимального извлечения энергии необходимо сделать начальную энергию E_0 минимально возможной, а энергию частицы E_1 , уносимой на бесконечность, — максимально большой. Предположим, что частица 0 падает из бесконечности, где она находилась в состоянии покоя. В геометризованной системе единиц это означает, что $E_0 = 1$. Также будем считать, что эта частица не обладает моментом количества движения: $L_0 = 0$.

Исходя из условия минимальной энергии (1.40), частица 1 имеет наименьшее значение энергии, если она изначально покоилась:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)_1 &= \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)_1 = 0, \\ E &= q\phi + \sqrt{1 - \frac{Mr^2}{(r^2 + g^2)^{\frac{3}{2}}}}. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Из условия (1.62) видно, что угловые моменты всех частиц равны нулю: $L_0 = L_1 = L_2 = 0$.

Теперь оценим массу m_1 . Для этого выразим m_2 из соотношения (1.57), принимая во внимание, что $\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)_1 = 0$:

$$m_2^2 = \left[\frac{m_0 \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)_0}{\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)_2} \right]^2. \quad (1.63)$$

Используя условия (1.59) и (1.63), приходим к следующему ограничению на эффективность:

$$\eta < - \left[q\phi + \sqrt{1 - \frac{Mr^2}{(r^2 + g^2)^{\frac{3}{2}}}} \right] \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)_0^2}{\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)_2^2}}. \quad (1.64)$$

Из выражения (1.64) следует, что энергия, уносимая второй частицей, не может превышать абсолютное значение энергии первой частицы 1. Как и в случае определения обобщённой эргосферы, можно отметить, что эффективность извлекаемой энергии зависит от заряда частицы q .

Следует также подчеркнуть следующий важный факт: если скорости падающей и улетающей частиц совпадают, то извлечение энергии отсутствует.

Следовательно, для реализации эффекта необходимо выполнение условия:

$$\left| \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)_2 \right| > \left| \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)_0 \right|. \quad (1.65)$$

Максимальная эффективность достигается тогда, когда скорость улетающей частицы значительно превосходит скорость падающей — именно такой случай соответствует извлечению энергии. Кроме того, чем ближе к горизонту происходит процесс, тем больше энергии можно извлечь. Вблизи горизонта эффективность описывается выражением:

$$\eta < -q\phi(r_{\max}) + \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)_0^2}{\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)_2^2}}. \quad (1.66)$$

Таким образом, мы рассмотрели процесс извлечения энергии из черной дыры Бардина. Этот процесс приводит к постепенному уменьшению магнитного заряда g черной дыры. Как следует из выражения для скаляра Кречманна:

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \frac{96M^2}{g^6}, \quad (1.67)$$

уменьшение g приводит к росту кривизны пространства-времени в центре, а полное исчерпание заряда вызывает образование истинной физической сингулярности.

В качестве примера приведём несколько моделей испарения заряда черной дыры. Для построения динамической модели черной дыры Бардина рассмотрим метрику (1.15) в координатах Эдингтона–Финкельштейна $\{v, r, \theta, \varphi\}$.

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr^2}{(r^2 + g^2)^{\frac{3}{2}}} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2. \quad (1.68)$$

Теперь рассмотрим магнитный заряд черной дыры как функцию опережающего времени v , то есть $g = g(v)$, где $\dot{g} < 0$. В рамках первой модели будем предполагать, что масса черной дыры остаётся постоянной в процессе изменения заряда. Тогда метрика (1.15) принимает следующий вид в координатах Эдингтона–Финкельштейна $\{v, r, \theta, \varphi\}$:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr^2}{(r^2 + g^2(v))^{\frac{3}{2}}} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2. \quad (1.69)$$

Скаляр Кречманна в центре $r = 0$ изменяется лишь тем, что магнитный заряд g теперь зависит от времени v :

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = R^{iklm} R_{iklm} = \frac{96M^2}{g^6(v)} < \infty. \quad (1.70)$$

Таким образом, центральная область остаётся регулярной при $g(v) > 0$, и сингулярность возникает только при полном исчерпании заряда $g(v) \rightarrow 0$.

Тензор энергии-импульса для данного пространства-времени можно представить в виде суммы:

$$T_{ik}^{\text{total}} = T_{ik}^{\text{Bardeen}} + T_{ik}^{\text{evaporation}}, \quad (1.71)$$

где T_{ik}^{Bardeen} — тензор энергии-импульса, соответствующий метрике Бардина (1.15), с учетом временной зависимости магнитного заряда $g(v)$, а $T_{ik}^{\text{evaporation}}$ описывает вклад, связанный с процессом испарения магнитного заряда.

В частности, ненулевая компонента тензора энергии-импульса, отвечающая за динамику испарения, имеет вид:

$$T_v^r = \frac{3Mr g(v) \dot{g}(v)}{(r^2 + g^2(v))^{\frac{5}{2}}}. \quad (1.72)$$

Важно отметить, что выполнение слабого энергетического условия требует неотрицательности этой компоненты: $T_v^r \geq 0$. Это, в свою очередь, приводит к условию $\dot{g}(v) < 0$, то есть уменьшению магнитного заряда со временем.

Таким образом, модель испарения магнитного заряда принимает следующий вид:

- $g = g_0 = \text{const.}$ в интервале времени $-\infty < v < 0$;
- $g = g_0 - \lambda v$, $\lambda > 0$ в интервале времени $0 \leq v \leq \frac{g_0}{\lambda}$;
- $g \equiv 0$ в интервале времени $v \geq \frac{g_0}{\lambda}$.

В момент испарения заряда черной дыры, т.е. в моменты времени $0 \leq v \leq \frac{g_0}{\lambda}$, T_v^r компонента тензора энергии-импульса имеет вид

$$T_v^r = \frac{3\lambda m r (1 - \lambda v)}{(r^2 + (1 - \lambda v)^2)^{\frac{5}{2}}}. \quad (1.73)$$

Однако, как упоминалось выше, эта модель идеализирована т.к. падающая частица также должна сообщать массу черной дыре, а следовательно, помимо испаряющегося заряда, масса черной дыры должна быть монотонно возрастающей функцией времени, т.е. $M \equiv M(v)$, $\dot{M} > 0$. В данном случае, метрика Бардина (1.15) принимает вид

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M(v)r^2}{(r^2 + g(v)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2. \quad (1.74)$$

Как и в предыдущей модели, зависимость массы и заряда от времени отображается только в T_v^r компоненте тензора энергии-импульса, которая имеет вид

$$T_v^r = \frac{1}{4\pi} \frac{r}{(r^2 + g(v)^2)^{\frac{5}{2}}} \times \left[\dot{M}(v)(r^2 + g(v)^2) - 3M(v)g(v)\dot{g}(v) \right]. \quad (1.75)$$

Как можно видеть, слабое энергетическое условие выполняется далеко не для любого выбора $M(v)$ и $g(v)$. В самом общем случае, вблизи центра черной дыры может существовать регион, где слабые энергетические условия нарушаются

$$r < \sqrt{g \left(\frac{3M\dot{g}}{\dot{M}} - g \right)}. \quad (1.76)$$

Подробнее о влияние этого региона на динамику черных дыр речь пойдет ниже. Для испаряющегося заряда и увеличивающейся массы черной дыры, можно построить следующую простую модель

- $M(v) \equiv M_0$, $g(v) \equiv g_0$ в начальный момент времени;
- В момент времени когда происходит испарение заряда, можно выбрать заряд и массу в виде

$$\begin{aligned} g(v) &= g_0 - \lambda v, \quad \lambda > 0, \\ M(v) &= M_0 + \mu v, \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Этот процесс происходит в промежутке времени $0, \frac{g_0}{\lambda}$.

- В момент времени $v = \frac{g_0}{\lambda}$, заряд полностью испаряется $g(v) \equiv 0$, а масса черной дыры становится $M = M_0 + \frac{\mu g_0}{\lambda}$. Таким образом, результирующее пространство-время есть метрика Шварцшильда.

Следует отметить, что вместо регулярной черной дыры Бардина можно рассмотреть любую другую регулярную черную дыру, источником которой служит нелинейная электродинамика. Поскольку магнитный монополь, согласно теории, играет роль регуляризующего фактора, нейтрализация черной дыры — вне зависимости от конкретного механизма — неизбежно приводит к образованию сингулярности. Таким образом, использование нелинейной электродинамики в качестве источника регулярной черной дыры делает последнюю принципиально неустойчивой.

Более того, поскольку лагранжиан теории обычно строится исходя из заданного вида метрики, практически любую регулярную черную дыру можно описать подходящим выбором лагранжиана нелинейной электродинамики. Однако, как будет показано ниже, наиболее известные решения уравнений Эйнштейна, описывающие регулярные чёрные дыры, могут быть получены не только искусственным подбором метрики, но и как результат гравитационного коллапса вещества, переходящего при критических плотностях в состояние, близкое к излучению.

Поэтому в дальнейшем будет предложен альтернативный подход к образованию регулярных чёрных дыр, не связанный с концепцией нелинейной электродинамики.

1.4 Модели регулярных черных дыр

В первых двух пунктах будут кратко описаны известные решения уравнений Эйнштейна, описывающие регулярные чёрные дыры: метрика Хэйворда [30] и метрика Дымниковой [29]. При рассмотрении различных процессов и поиске новых решений регулярных чёрных дыр эти два решения, наряду с метрикой Бардина, будут встречаться наиболее часто.

1.4.1 Чёрная дыра Хэйворда

Рассматривая вопросы формирования и испарения чёрных дыр, Хэйворд [30] предложил минимальную модель регулярной чёрной дыры, которая впоследствии получила название *чёрной дыры Хэйворда*. Метрика Хэйворда

имеет вид:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2d\Omega^2, \\ f(r) &= 1 - \frac{2Mr^2}{r^3 + 2ML^2}. \end{aligned} \quad (1.78)$$

Здесь M — масса чёрной дыры, а L — параметр регуляризации. Как и в случае метрики Бардина (1.15), пространство-время Хэйворда при $M \rightarrow 0$ переходит в плоское пространство-время Минковского, а при $L \rightarrow 0$ — в метрику Шварцшильда (1.1).

Позднее было установлено, что введённый Хэйвордом параметр регуляризации L , который изначально предполагался порядка планковской длины, играет роль магнитного монополя и может принимать значения в диапазоне $\{0, \infty\}$. Источником решения (1.78) является нелинейная электродинамика с плотностью лагранжиана:

$$\mathcal{L} = \frac{6}{L^2} \frac{(2L^2F)^{\frac{3}{2}}}{\left[1 + (2L^2F)^{\frac{3}{4}}\right]^2}. \quad (1.79)$$

Как уже упоминалось ранее, параметр L тесно связан с магнитным зарядом, который выражается следующим образом:

$$q_m = \frac{\sqrt[3]{4M^2L}}{2}. \quad (1.80)$$

Метрика Хэйворда в пределе $r \rightarrow 0$ ведёт себя как решение де Ситтера:

$$f(r) \simeq 1 - \frac{r^2}{L^2} + \mathcal{O}(r^3). \quad (1.81)$$

В зависимости от соотношения между параметрами L и M , решение Хэйворда (1.78) может описывать:

- магнитный монополь (в отсутствие горизонтов),
 - экстремальную чёрную дыру (с вырожденным горизонтом),
 - или чёрную дыру с двумя различными горизонтами.
- $L < \frac{4M}{3\sqrt{3}}$ - решение (1.78) описывает регулярную черную дыру с двумя горизонтами;
 - $L = \frac{4M}{3\sqrt{3}}$ - Решение Хэйворда описывает экстремальную черную дыру с одним горизонтом;

- $L > \frac{4M}{3\sqrt{3}}$ - Горизонты отсутствуют и решение Хэйворда описывает магнитный монополь.

Сам Хэйворд предложил следующую модель формирования и испарения регулярной чёрной дыры:

- $-\infty < v < 0$: на этом этапе пространство-время является плоским и описывается метрикой Минковского;
- $0 \leq v \leq v_1$: происходит процесс образования чёрной дыры, масса системы возрастает, и к моменту времени $v = v_1$ формирование завершается, образуется статическая регулярная чёрная дыра Хэйворда;
- $v_1 \leq v \leq v_2$: чёрная дыра находится в стационарном состоянии — ни аккреции, ни испарения не происходит;
- $v_2 < v \leq v_3$: начинается процесс испарения чёрной дыры;
- $v_3 \leq v < \infty$: к моменту времени $v = v_3$ чёрная дыра полностью испаряется, оставляя, по утверждению Хэйворда, плоское пространство-время Минковского.

Однако это заключение не вполне корректно. Как будет показано ниже, полное испарение регулярной чёрной дыры до плоского пространства-времени возможно лишь при наличии промежуточной стадии, на которой горизонты исчезают, оставляя после себя регулярный объект без горизонтов. Лишь после этого такой объект может полностью испариться, и пространство-время станет плоским.

Динамика тени чёрной дыры Хэйворда в случае наличия конформного вектора Киллинга была рассмотрена в работе [121], а термодинамические свойства этой метрики подробно исследованы в [122].

1.4.2 Регулярная чёрная дыра Дымниковой

В своей работе Дымникова [29] показала, что сферически-симметричная вакуумная среда может привести к решению уравнений Эйнштейна, описывающему чёрную дыру с регулярным центром. Таким образом она развивала идею Сахарова [14] и Глинера [15], согласно которым при достижении критических плотностей вакуум заменяется вакуумно-подобной средой, описываемой метрикой де Ситтера.

Дымникова предположила следующий вид для плотности энергии:

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{r^3}{2Mr_0^2}}. \quad (1.82)$$

Здесь параметры r_0 и ρ_0 связаны соотношением:

$$r_0^2 = \frac{3}{\rho_0}. \quad (1.83)$$

Используя связь массовой функции с плотностью энергии (1.12), приходим к метрике Дымниковой:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2d\Omega^2, \\ f(r) &= 1 - \frac{2M}{r} \left(1 - e^{-\frac{r^3}{2Mr_0^2}} \right). \end{aligned} \quad (1.84)$$

Как и метрика Хэйворда, это решение может описывать как регулярную чёрную дыру с двумя горизонтами, так и экстремальную чёрную дыру. При $r \rightarrow 0$ метрика ведёт себя как метрика де Ситтера, а на больших расстояниях ($r \rightarrow \infty$) переходит в метрику Шварцшильда (1.1).

Отметим важный факт, подчеркиваемый самой Дымниковой, но игнорируемый многими другими авторами: решение (1.84) справедливо только вблизи центральной области черной дыры. Уравнение состояния вещества, являющегося источником данной метрики, становится неприемлемым на больших r , поскольку нарушает доминантное энергетическое условие — материя начинает двигаться по пространственно-подобным траекториям, что физически некорректно.

Поэтому метрика Дымниковой должна быть гладко сшита с другим решением, описывающим внешнюю геометрию чёрной дыры. Были предприняты попытки гладкого сшивания её с метрикой Шварцшильда, однако это требует существования тонкого материального слоя на границе сшивки.

Ниже мы покажем, что гладкая сшивка динамической метрики Дымниковой с излучающей метрикой Вайдья (являющейся обобщением Шварцшильда на нестационарный случай) невозможна без введения дополнительного материального слоя.

В связи с этим все исследования, посвящённые тени чёрной дыры, квазинормальным модам, термодинамике и эффектам в эргосфере для вращающейся чёрной дыры Дымниковой [123], являются физически некорректными,

поскольку проводятся в области, где нарушаются основные энергетические условия.

1.4.3 Непостоянный коэффициент уравнения состояния.

Регулярная чёрная дыра может быть результатом гравитационного коллапса массивных звёзд, состоящих из обычного вещества. Чтобы понять природу перехода материи из обычного состояния в состояние с отрицательным давлением и де Ситтеровским ядром в центре, была разработана следующая модель, которая, как будет показано в следующем разделе, связана с решением уравнений Эйнштейна с материей Хагедорна в качестве источника [37].

Как обычно, предположим статическое сферически-симметричное пространство-время вида:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (1.85)$$

Ненулевые компоненты тензора Эйнштейна для этой метрики имеют вид:

$$G_t^t = G_r^r = \frac{rf'(r) + f(r) - 1}{r^2}, \quad (1.86)$$

$$G_\theta^\theta = G_\phi^\phi = \frac{f''(r)}{2} + \frac{f'(r)}{r}. \quad (1.87)$$

Без потери общности функцию $f(r)$ можно выразить через массовую функцию $M(r)$ следующим образом:

$$f(r) = 1 - \frac{2M(r)}{r}. \quad (1.88)$$

Тогда компоненты тензора Эйнштейна принимают вид:

$$G_t^t = G_r^r = -\frac{2M'(r)}{r^2}, \quad (1.89)$$

$$G_\theta^\theta = G_\phi^\phi = -\frac{M''(r)}{r}. \quad (1.90)$$

Учитывая анизотропный тензор энергии-импульса, запишем уравнения Эйнштейна в терминах плотности энергии ρ , давления P и массовой функции $M(r)$:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{2M'}{r^2}, \\ P &= -\frac{M''}{r}. \end{aligned} \quad (1.91)$$

Эта система состоит из двух обыкновенных дифференциальных уравнений, но содержит три неизвестные функции: $\rho(r)$, $P(r)$ и $M(r)$. Для замыкания системы необходимо задать дополнительное соотношение — уравнение состояния, связывающее давление и плотность энергии:

$$P = P(\rho). \quad (1.92)$$

Мы воспользуемся другим подходом и введём эффективный коэффициент уравнения состояния:

$$k(r) \equiv \frac{P}{\rho}, \quad (1.93)$$

который, в отличие от космологических моделей, может зависеть от радиальной координаты r .

Хотя в космологии часто используется баротропное уравнение состояния $P = k\rho$ с константой $k \in [-1, 1]$, мы рассмотрим более общий случай, где $k(r)$ является функцией радиуса:

$$P = k(r)\rho. \quad (1.94)$$

Для физической самосогласованности модели наложим стандартные ограничения, чтобы выполнялись слабые и доминантные энергетические условия:

- Слабое энергетическое условие: $\rho \geq 0$;
- Доминантное энергетическое условие: $k(r) \in [-1, 1]$.

Подставляя уравнение состояния (1.94) в уравнения Эйнштейна (1.91), получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$M''r + 2k(r)M' = 0. \quad (1.95)$$

Введём новую переменную $w \equiv M'$, тогда уравнение (1.95) преобразуется к виду:

$$w'r + 2k(r)w = 0. \quad (1.96)$$

Его общее решение имеет вид:

$$w(r) = w_0 \exp\left(-2 \int \frac{k(r)}{r} dr\right), \quad (1.97)$$

где $w_0 > 0$ — положительная константа интегрирования.

Интегрируя ещё раз, получаем выражение для массовой функции:

$$M(r) = \int w(r) dr + M_0, \quad (1.98)$$

где M_0 — вторая константа интегрирования, которую можно интерпретировать как массу чёрной дыры, если полученное решение будет описывать такой объект.

Мы хотим построить модель, в которой вещество на некотором расстоянии R от центра описывается пылью ($P = 0$), а в центре реализуется уравнение состояния $P = -\rho$, соответствующее де Ситтеровскому ядру. Примем, что эффективный коэффициент уравнения состояния зависит от радиуса линейно:

$$k(r) = \frac{r}{R} - 1. \quad (1.99)$$

Такое поведение $k(r)$ согласуется с известными представлениями о том, что в центре черной дыры может возникнуть область с вакуумоподобной материей, связанной с космологической постоянной Λ , которая, в свою очередь, определяется плотностью энергии самовзаимодействия [124].

Подставляя (1.99) в (1.98), после интегрирования находим:

$$M(r) = M_0 - \frac{w_0}{2} \left(Rr^2 + R^2r + \frac{R^3}{2} \right) e^{-\frac{2r}{R}}. \quad (1.100)$$

Соответствующие плотность энергии и давление имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho &= 2w_0 e^{-\frac{2r}{R}}, \\ P &= 2w_0 \left(\frac{r}{R} - 1 \right) e^{-\frac{2r}{R}}. \end{aligned} \quad (1.101)$$

Как видно, плотность энергии и давление конечны во всём пространстве-времени, включая центр:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \rho &= 2w_0, \\ \lim_{r \rightarrow 0} P &= -2w_0. \end{aligned} \quad (1.102)$$

Константа w_0 может быть интерпретирована как плотность энергии вакуума в центре пространства-времени.

Поскольку давление и плотность энергии всюду конечны, для того чтобы убедиться, что решение (1.100) описывает регулярную чёрную дыру, остаётся проанализировать поведение массовой функции в окрестности $r = 0$.

$$\lim_{r \rightarrow 0} M(r) = M_0 - \frac{w_0 R^3}{4}. \quad (1.103)$$

Откуда становится ясно, что решение (1.100) может описывать регулярную черную дыру если

$$w_0 = \frac{4M_0}{R^3}. \quad (1.104)$$

Выпишем также инварианты кривизны для решения (1.100) Скаляр Риччи

$$R_{icci} = \frac{2M''}{r} + \frac{4M'}{r^2} = \frac{(8R - 4r) w_0 e^{-\frac{2r}{R}}}{R}. \quad (1.105)$$

Квадрат тензора Риччи

$$S = \frac{2(M'')^2}{r^2} + \frac{8(M')^2}{r^4} = \frac{8w_0^2 e^{-\frac{4r}{R}} (2R^2 - 2Rr + r^2)}{R^2}. \quad (1.106)$$

Выражение для скаляра Кречмана слишком громоздкое, поэтому мы приводим здесь только его значение в центре:

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \frac{512M_0^2}{3R^6}. \quad (1.107)$$

Важно отметить, что скаляр Риччи и квадрат тензора Риччи остаются конечными при $r \rightarrow 0$ независимо от выполнения условия (1.104):

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} R_{icci} &= 8w_0, \\ \lim_{r \rightarrow 0} S &= 16w_0^2. \end{aligned} \quad (1.108)$$

Скаляр Кречмана, в отличие от них, конечен только при выполнении условия (1.104).

Таким образом, метрика пространства-времени может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2, \\ f(r) &= 1 - \frac{2M_0}{r} \left[1 - \frac{2}{R^2} \left(r^2 + rR + \frac{R^2}{2} \right) e^{-\frac{2r}{R}} \right]. \end{aligned} \quad (1.109)$$

Это решение на бесконечности переходит в метрику Шварцшильда (1.1), а в центре описывает пространство-время де Ситтера.

Следует отметить, что доминантные энергетические условия выполняются во всём пространстве-времени по построению. Слабые энергетические

условия выполняются повсюду, если $w_0 \geq 0$. Поскольку коэффициент уравнения состояния линейно зависит от r , то с увеличением радиуса растёт и давление. Поэтому на некотором удалении от центра давление и плотность энергии становятся равными, что соответствует предельно жёсткому уравнению состояния $p = \rho$. За этим радиусом давление превышает плотность энергии, что приводит к нарушению доминантных энергетических условий. Однако наше утверждение об их выполнении остаётся справедливым, поскольку данное решение построено в предположении, что в центре находится ядро де Ситтера, а на поверхности — пылевое вещество. Таким образом, решение корректно только внутри шара радиуса R ; вне этого шара необходимо использовать другую метрику. Мы покажем, как эти решения могут быть сшиты, при рассмотрении динамической эволюции чёрной дыры.

Сильные энергетические условия нарушаются в центре, но выполняются в области $R < r < \infty$.

Ещё одним важным свойством решения (1.100) является то, что оно описывает как сингулярные, так и регулярные чёрные дыры. Более того, при рассмотрении динамической эволюции можно построить модель, в которой сингулярность может как формироваться, так и исчезать. Это указывает на то, что такая сингулярность является гравитационно-слабой. Подробное обсуждение этого вопроса будет приведено в главе, посвящённой динамическим чёрным дырам.

1.4.4 Уравнение состояния Хагедорна

В 1965 году Хагедорн предположил, что при больших массах m адронный спектр $\rho(m)$ растёт экспоненциально:

$$\rho(m) \sim \exp(m/T_H), \quad (1.110)$$

где T_H — температура Хэйдждорна [125]. Эта идея возникла из наблюдения, что при определённой энергии добавление большего количества энергии в протон-протонных и протон-антипротонных столкновениях перестаёт увеличивать температуру результирующего огненного шара и вместо этого приводит к образованию большего числа частиц. Это указывает на существование максимально достижимой температуры T_H для адронной систе-

мы [126–128]. Более того, фаза материи Хагедорна с высокой плотностью широко используется в космологии для описания ранних стадий эволюции Вселенной [129–131].

Уравнение состояния в сверхплотной области основано на предположении, что при высоких плотностях возникает множество барионных резонансных состояний. Хагедорн предложил модель с уравнением состояния [125, 132, 133]

$$\bar{P} = P_0 + \rho_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0}, \quad (1.111)$$

где P_0 и ρ_0 — константы:

$$\begin{aligned} P_0 &= 0.314 \times 10^{14} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}, \\ \rho_0 &= 1.253 \times 10^{14} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}. \end{aligned} \quad (1.112)$$

Как уже упоминалось, тензор энергии-импульса описывает анизотропную жидкость. Однако можно ввести усреднённое давление:

$$\bar{p} = \frac{1}{3} (2P_2 + P_1). \quad (1.113)$$

Используя тот факт, что $p_1 = -\rho$, и обозначая $p_2 = P$, можно переписать уравнение состояния (1.111) в виде:

$$\frac{2}{3}P = P_0 + \frac{1}{3}\rho + \rho_0 \ln \frac{\rho}{\rho_0}. \quad (1.114)$$

Или, используя определения плотности энергии и давления (1.12), можно переписать (1.114) через массовую функцию:

$$-\frac{2}{3} \frac{M''}{r} = P_0 + \frac{2}{3} \frac{M'}{r^2} + \rho_0 \ln \left| \frac{2M'}{r^2 \rho_0} \right|. \quad (1.115)$$

Для нахождения решения этого обыкновенного дифференциального уравнения введём новую переменную h :

$$h(r) \equiv \frac{2M'}{r^2 \rho_0}. \quad (1.116)$$

Тогда вторая производная от массовой функции выражается через переменную h следующим образом:

$$-\frac{2M''}{3r} = -\frac{\rho_0}{3} r h' - \frac{2\rho_0}{3} h. \quad (1.117)$$

Таким образом, уравнение (1.115) принимает вид:

$$-rh' = 3\alpha + 3h + 3 \ln h. \quad (1.118)$$

Мы можем записать формальное решение в виде

$$r = \beta e^{-\zeta(h)}, \quad (1.119)$$

где β константа интегрирования, а

$$\zeta(h) \equiv \frac{1}{3} \int \frac{dh}{\alpha + h + \ln h}, \quad (1.120)$$

и безразмерная константа $\alpha \equiv \frac{P_0}{\rho_0} \approx 0.25$.

Полное решение может быть записано в виде

$$2M(r) = \int hr^2 dr = -\frac{\beta^3}{3} \int \frac{he^{-3h} dh}{\alpha + h + \ln h} + 2M_0, \quad (1.121)$$

В случае, если это решение описывает черную дыру, постоянная интегрирования M_0 играет роль массы черной дыры. Если плотность энергии стремится к постоянному значению $\rho \rightarrow \rho_0$, параметр $h \rightarrow 1$. Поэтому, переходя в интеграле (1.119) к новой переменной интегрирования $w \equiv \ln h$, мы можем разложить решение (1.119) по степеням w

$$\frac{r}{\beta} \approx 1 - \frac{4}{15}w + \mathcal{O}(w^2). \quad (1.122)$$

Учитывая, что $h = e^w$, мы приходим к уравнению

$$h = e^{\frac{15}{4}(1-\frac{r}{\beta})}. \quad (1.123)$$

Используя, при этом, (1.116), мы получаем решение в виде

$$M(r) = M_0 - \frac{2\beta\rho_0}{15} \left(r^2 + \frac{8\beta r}{15} + \frac{32\beta^2}{225} \right) e^{\frac{15}{4}(1-\frac{r}{\beta})}. \quad (1.124)$$

Важно отметить, что данное решение совпадает с (1.100), в котором предполагается, что поверхность звезды описывается пылевым веществом, а её внутренняя часть представляет собой де Ситтеровское ядро. Это решение также может описывать регулярную чёрную дыру при выполнении условия

$$M_0 = \frac{64\beta^3\rho_0}{3375} e^{\frac{15}{4}}. \quad (1.125)$$

Независимо от выполнения этого соотношения, давление и плотность энергии имеют конечный предел в центре. Однако именно при данном соотношении между параметрами достигается конечность скаляра Кречмана в центре, что обеспечивает регулярность геометрии и отсутствие сингулярности.

В этом случае уравнение состояния Хагедорна принимает вид

$$P = \left(-1 + \frac{15r}{8\beta} \right) \rho. \quad (1.126)$$

Заметим, что мы в точности восстанавливаем решение (1.100), если введем обозначение

$$R \equiv \frac{8\beta}{15}. \quad (1.127)$$

Тогда функция $f(r)$ принимает вид:

$$f(r) = 1 - \frac{2M_0}{r} + \frac{4\beta\rho_0 e^{\frac{15}{4}(1-\frac{r}{\beta})} (32\beta^2 + 225r^2 + 120\beta r)}{3375r}. \quad (1.128)$$

Альтернативная форма этого выражения, удобная для анализа асимптотик, выглядит следующим образом:

$$f(r) = 1 - \frac{2M_0}{r} + e^{-\frac{15r}{4\beta} + \frac{15}{4}} \left(\frac{4r\rho_0\beta}{15} + \frac{32\rho_0\beta^2}{225} \right) + O(\beta^3). \quad (1.129)$$

Заметим, что при $r \rightarrow \infty$, решение асимптотически переходит в метрику Шварцшильда (1.1), то есть

$$f(r) \approx 1 - \frac{2M_0}{r} \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Инварианты кривизны, такие как квадрат тензора Риччи,

$$\begin{aligned}
S &= \frac{\rho_0^2 \left(e^{\frac{15}{4}}\right)^2 \left(e^{-\frac{15r}{4\beta}}\right)^2 (128\beta^2 - 240r\beta + 225r^2)}{32\beta^2}, \\
K &= \frac{225r^2 \rho_0^2 e^{\frac{15}{2}} e^{-\frac{15r}{2\beta}}}{16\beta^2} + 8\rho_0^2 e^{\frac{15}{2}} e^{-\frac{15r}{2\beta}} + \frac{64\beta \rho_0^2 e^{\frac{15}{2}} e^{-\frac{15r}{2\beta}}}{15r} + \frac{64\beta^2 \rho_0^2 e^{\frac{15}{2}} e^{-\frac{15r}{2\beta}}}{25r^2} \\
&+ \frac{4096\beta^3 \rho_0^2 e^{\frac{15}{2}} e^{-\frac{15r}{2\beta}}}{3375r^3} + \frac{8192\beta^4 \rho_0^2 e^{\frac{15}{2}} e^{-\frac{15r}{2\beta}}}{16875r^4} + \frac{32768\beta^5 \rho_0^2 e^{\frac{15}{2}} e^{-\frac{15r}{2\beta}}}{253125r^5} \\
&+ \frac{65536\beta^6 \rho_0^2 e^{\frac{15}{2}} e^{-\frac{15r}{2\beta}}}{3796875r^6} - \frac{30M_0 e^{\frac{15}{4}} e^{-\frac{15r}{4\beta}} \rho_0}{\beta r^2} - \frac{16M_0 e^{\frac{15}{4}} e^{-\frac{15r}{4\beta}} \rho_0}{r^3} \\
&- \frac{64\beta M_0 e^{\frac{15}{4}} e^{-\frac{15r}{4\beta}} \rho_0}{5r^4} - \frac{512\beta^2 M_0 e^{\frac{15}{4}} e^{-\frac{15r}{4\beta}} \rho_0}{75r^5} - \frac{2048\beta^3 M_0 e^{\frac{15}{4}} e^{-\frac{15r}{4\beta}} \rho_0}{1125r^6} \\
&+ \frac{48M_0^2}{r^6}. \tag{1.130}
\end{aligned}$$

и скаляр Риччи

$$R_{icci} = \frac{(16\beta - 15r) e^{-\frac{15r}{4\beta}} e^{\frac{15}{4}} \rho_0}{4\beta}. \tag{1.131}$$

имеют конечные значения в пределе $r \rightarrow 0$

$$\lim_{r \rightarrow 0} R_{icci} = 4 e^{\frac{15}{4}} \rho_0, \tag{1.132}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} S = 4 e^{\frac{15}{2}} \rho_0^2$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \frac{8\rho_0^2 e^{\frac{15}{2}}}{3}. \tag{1.133}$$

Таким образом, вещество Хагедорна , может приводить к образованию регулярных черных дыр.

1.5 Гравитационное расщепление

Еще одним методом построения регулярных черных дыр является гравитационное расщепление. Вначале будет дана теоретическая основа, описывающая этот метод. Затем он будет применён для получения новых решений уравнений Эйнштейна. В завершение будут представлены исследования, демонстрирующие, как дополнительное вещество влияет на структуру несингулярного центра черных дыр Бардина и Хэйворда.

Гравитационное расщепление представляет собой мощный инструмент для получения новых решений уравнений Эйнштейна с более реалистичным распределением материи [134–138]. Основная идея метода заключается в том, что уравнения Эйнштейна для сферически-симметричного пространства-времени являются линейными по тензору Эйнштейна, а значит, сумма частных решений также является решением.

Метод предполагает, что уравнения Эйнштейна решаются для обобщённого тензора энергии-импульса вида:

$$\tilde{T}_{ik} = T_{ik} + \Theta_{ik}, \quad (1.134)$$

где T_{ik} — тензор энергии-импульса, для которого известно решение уравнений Эйнштейна:

$$G_{ik} = 8\pi T_{ik}. \quad (1.135)$$

Это решение считается основным. Тензор Θ_{ik} описывает дополнительное вещество, которое деформирует геометрию основного решения. Уравнения Эйнштейна для этого дополнительного вещества имеют вид:

$$\bar{G}_{ik} = \alpha \Theta_{ik}, \quad (1.136)$$

где α — константа связи, а \bar{G}_{ik} — тензор Эйнштейна, соответствующий геометрическим деформациям.

Метод гравитационного расщепления утверждает, что суперпозиция двух решений (1.135) и (1.136):

$$\tilde{G}_{ik} \equiv G_{ik} + \bar{G}_{ik} = 8\pi T_{ik} + \alpha \Theta_{ik} \equiv \tilde{T}_{ik}, \quad (1.137)$$

также является решением уравнений Эйнштейна.

Рассмотрим уравнения Эйнштейна в стандартной форме:

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = 8\pi T_{ik}. \quad (1.138)$$

Пусть решением уравнений (1.138) является сферически-симметричное пространство-время со следующей метрикой:

$$ds^2 = -e^{\nu(r)}dt^2 + e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (1.139)$$

Где $\nu = \nu(r)$ и $\lambda = \lambda(r)$ и эти функции предполагаются известными.

Эта метрика будет служить основной, подверженной геометрическим деформациям. Деформации описываются двумя функциями $\xi = \xi(r)$ и $\eta = \eta(r)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} e^{\nu(r)} &\rightarrow e^{\nu(r)+\alpha\xi(r)}, \\ e^{\lambda(r)} &\rightarrow e^{\lambda(r)} + \alpha\eta(r). \end{aligned} \quad (1.140)$$

Здесь α — константа связи. Если $\xi \equiv 0$, то деформации подвергается только компонента g_{11} метрики. Такой подход называется методом минимальных геометрических деформаций [139, 140]. Однако он имеет ряд недостатков, связанных, в первую очередь, с проблемами стабильности чёрных дыр и сложностями в определении положения горизонтов [138].

Если деформациям подвергаются обе компоненты метрики, g_{00} и g_{11} , то такой подход называется расширенным гравитационным расщеплением. Основной недостаток этого метода заключается в том, что дополнительное вещество, вызывающее геометрические деформации, должно обмениваться энергией с материей изначальной метрики. Это делает невозможным рассмотрение влияния темной материи на известные решения, за исключением случая вакуумной метрики Шварцшильда (1.1).

Подставляя выражения (1.140) в основную метрику, получаем:

$$ds^2 = -e^{\nu+\alpha\xi} dt^2 + (e^\lambda + \alpha\eta) dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1.141)$$

Уравнения Эйнштейна для этой деформированной метрики принимают вид:

$$\begin{aligned} 8\pi(T_0^0 + \Theta_0^0) &= -\frac{1}{r^2} + e^{-\beta} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\beta'}{r} \right), \\ 8\pi(T_1^1 + \Theta_1^1) &= -\frac{1}{r^2} + e^{-\beta} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu' + \alpha\xi'}{r} \right), \\ 8\pi(T_2^2 + \Theta_2^2) &= \frac{1}{4} e^{-\beta} \left[2(\nu'' + \alpha\xi'') + (\nu' + \alpha\xi')^2 - \beta'(\nu' + \alpha\xi') + 2\frac{\nu' + \alpha\xi' - \beta'}{r} \right], \\ &e^\beta \equiv e^\lambda + \alpha\eta. \end{aligned} \quad (1.142)$$

Из уравнений (1.142) можно определить эффективные плотность энергии и радиальную и тангенциальную части давления

$$\begin{aligned}\tilde{\rho} &= -(T_0^0 + \Theta_0^0), \\ \tilde{P}_r &= T_1^1 + \Theta_1^1, \\ \tilde{P}_t &= T_2^2 + \Theta_2^2.\end{aligned}\tag{1.143}$$

Из этого определения, можно ввести параметр изотропии Π

$$\Pi = \tilde{P}_t - \tilde{P}_r.\tag{1.144}$$

В случае, когда $\Pi \neq 0$ тензор энергии-импульса носит анизотропный характер. Важно отметить, что изотропизация тензора энергии-импульса неизбежно ведет к не асимптотически-плоским решениям для черных дыр.

Уравнения (1.142) могут быть расщеплены на две системы уравнений: одна из этих систем есть уравнения Эйнштейна для основной метрики (1.139), а потому тождественно исчезают, другая же система описывает уравнения Эйнштейна связанные только с геометрическими деформациями. В работе [137] было получено решение Шварцшильда с дополнительными параметрами, которые могут играть роль "волоса" черной дыры. Это решение имеет вид:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \alpha e^{-\frac{r}{M-\frac{\alpha l}{2}}} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \alpha e^{-\frac{r}{M-\frac{\alpha l}{2}}} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2.\tag{1.145}$$

Здесь l связан с "волосом" черной дыры, чья природа до сих пор неизвестна, а масса черной дыры M связана теперь с Шварцшильдовой массой \mathcal{M} соотношением

$$M = \mathcal{M} + \frac{\alpha l}{2},\tag{1.146}$$

Решение (1.145) породило волну исследований ее свойств, а метод гравитационного расщепления широко применяется в литературе в наше время [141–149]. С помощью этого метода можно найти не только новые решения, но и показать, что ряд широко известных решений, такие как черные дыры Рейсснера-Нордстрема или Киселева [150] являются следствием применения этого метода. Ниже будет приведено несколько решений полученных с помощью этого метода автором данной работы.

1.5.1 Черная дыра Киселева

Решение Киселёва представляет собой чёрную дыру Шварцшильда, помещённую в расширяющуюся Вселенную [150]. Первоначально было получено решение, описывающее чёрную дыру Шварцшильда на фоне вещества, обладающего квинтэссенциоподобным уравнением состояния. Однако позднее это решение стало называться метрикой Шварцшильда, окружённой космологическими полями.

В настоящее время термин «квинтэссенция» широко используется научным сообществом при анализе метрики Киселёва. Как показано в работе [151], такое применение термина является некорректным, и более точным будет говорить о квинтэссенциоподобной субстанции.

Под термином «космологические поля» обычно понимается вещество, окружающее чёрную дыру. Это может быть пылевое вещество, излучение или космологическая постоянная — последнее решение известно как метрика Коттлера. В последнее время метрики, подобные решению Киселёва, активно используются для описания чёрных дыр, окружённых тёмной материей.

В качестве примера рассмотрим метрику Шварцшильда, деформированную наличием дополнительного вещества (1.145), и построим её обобщение на случай, когда чёрная дыра окружена веществом с баротропным уравнением состояния.

Рассмотрим метрику статического сферически-симметричного пространства-времени в виде:

$$ds^2 = -f(r)dv^2 + 2\varepsilon dvdr + r^2d\Omega^2, \quad (1.147)$$

где $\varepsilon = \pm 1$ определяет направление времени (для будущего-направленного времени выбирается $\varepsilon = +1$).

Ненулевые компоненты тензора Эйнштейна для этой метрики имеют вид:

$$\begin{aligned} G_0^0 = G_1^1 &= \frac{1}{r^2} (f'r - 1 + f), \\ G_2^2 = G_3^3 &= \frac{1}{r^2} \left(rf' + \frac{1}{2}r^2 f'' \right), \end{aligned} \quad (1.148)$$

Тензор энергии импульса рассматриваемой системы представляет собой комбинацию Θ_{ik} - материи вызывающей минимальные геометрические деформа-

ции и T_{ik} описывающий распределение материи окружающей черную дыру.

$$\tilde{T}_{ik} = \alpha \Theta_{ik} + T_{ik}. \quad (1.149)$$

Можно определить тензор энергии импульса T_{ik} окружающей материи в виде

$$\begin{aligned} T_0^0 &= -\rho(r), \\ T_k^i &= -\rho(r) \left[-\xi (1 + 3\zeta) \frac{r^i r_k}{r^n r_n} + \zeta \delta_k^i \right]. \end{aligned} \quad (1.150)$$

Из вида тензора энергии-импульса (1.150), можно видеть что пространственная компонента пропорциональна временной компоненте, которая, в свою очередь, описывает плотность энергии ρ . Коэффициенты пропорциональности ξ и ζ зависят от внутренней структуры вещества, которое окружает черную дыру. Усредняя по углам, находим

$$\langle T_k^i \rangle = \frac{\xi}{3} \rho \delta_k^i = P \delta_k^i, \quad (1.151)$$

Здесь мы воспользовались тем фактом, что $\langle r^i r_k \rangle = \frac{1}{3} \delta_k^i r_n r_n$. Как мы упоминали выше, для окружающей черную дыру материи, мы воспользуемся баротропным уравнением состояния:

$$P(r) = \omega \rho(r), \quad \omega = \frac{\xi}{3}, \quad (1.152)$$

ω - константа уравнения состояния. Исходя из принципа аддитивности и линейности уравнений Эйнштейна в случае сферической симметрии, мы можем определить константу ζ в виде

$$\zeta = -\frac{1 + 3\omega}{6\omega}. \quad (1.153)$$

Подставляя (1.152) и (1.153) в (1.150), мы окончательно приходим к выражению тензора энергии-импульса описывающего распределение материи окружающей черную дыру

$$\begin{aligned} T_0^0 &= T_1^1 = -\rho, \\ T_2^2 &= T_3^3 = \frac{1}{2} (1 + 3\omega) \rho. \end{aligned} \quad (1.154)$$

Собирая вместе (1.148), (1.154), (1.150) и (1.149), мы можем выписать уравнения Эйнштейна в виде

$$\frac{1}{r^2} (f' r - 1 + f) = -\rho - \alpha \tilde{\rho}. \quad (1.155)$$

$$\frac{1}{r^2} \left(r f' + \frac{1}{2} f'' r^2 \right) = \frac{1}{2} (1 + 3\omega) \rho + \tilde{P}. \quad (1.156)$$

Для решения этого уравнения представим функцию $f(r)$ в виде

$$f(r) = g(r) - \frac{\alpha l}{r} + \alpha e^{-\frac{2r}{2M-\alpha l}}. \quad (1.157)$$

И мы приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} (g' r - 1 + g) &= -\rho, \\ \frac{1}{r^2} \left(r g' + \frac{1}{2} g'' r^2 \right) &= \frac{1}{2} (1 + 3\omega) \rho. \end{aligned} \quad (1.158)$$

Наконец, интегрируя, мы находим функцию $g(r)$ в виде

$$g(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{N}{r^{3\omega+1}}, \quad (1.159)$$

Плотность энергии окружающей материи задается формулой

$$\rho(r) = -\frac{3\omega N}{r^{3(\omega+1)}}. \quad (1.160)$$

Где M и N - константы интегрирования, представляющие собой шварцшильдову массу и параметр, отвечающий за структуру окружающей материи. Наконец, собирая все вместе, мы приходим к решению

$$\begin{aligned} ds^2 &= -f(r) dt^2 + f^{-1}(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2, \\ f(r) &= 1 - \frac{2M}{r} - \frac{N}{r^{3\omega+1}} + \alpha e^{-\frac{2r}{2M-\alpha l}} \end{aligned} \quad (1.161)$$

Для того, чтобы это решение не нарушало слабого энергетического условия необходимо потребовать, исходя из выражения для плотности энергии окружающего вещества (1.160), чтобы параметр уравнения состояния ω и параметр структуры окружающей материи N имели разные знаки. Решение (1.161) можно интерпретировать как решение Киселева с дополнительными параметрами ("волосами") [152].

1.6 Черная дыра Вайдья и гравитационное расщепление

Метрика Вайдья [153] является простейшей моделью описывающей динамическую черную дыру. Эта метрика еще известна как излучающая метри-

ка Шварцшильда. В астрофизике, она играет важную роль, т.к. она хорошо подходит для описания внешней геометрии излучающих звезд [154]. В координатах Эддингтона-Филнкенштейна $\{v, r, \theta, \varphi\}$ эта метрика имеет вид:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M(v)}{r} \right) dv^2 + 2\varepsilon dvdr + r^2 d\Omega^2. \quad (1.162)$$

Здесь v эддингтоново опережающее/замедляющее время, $\varepsilon = \pm 1$ в зависимости от того рассматривается ли входящее или исходящее излучение соответственно. Метрика Вайдья является одной из самых ранних примеров нарушения космического принципа цензуры [155], который утверждает, что любая сингулярность должна быть скрыта под горизонтом. Позднее метрика Вайдья была обобщена на случай изотропных струн - так называемую обобщенную метрику Вайдья [156]. Свойства этой метрики были интенсивно изучены в работах [157–188]. Обобщение на случай гравитационного расщепления крайне простое. Стоит отметить, что включение динамики в рассматриваемую задачу вносит лишь одно дополнение - появление компоненты тензора энергии-импульса T_r^v отвечающего за плотность потока излучения. Эффективные плотность энергии и давления имеют ту же форму, что и в статичном случае, за исключением того, что массовая функция теперь является функцией времени. Как результат метрику Вайдья с дополнительными параметрами, полученную в результате применения метода гравитационного расщепления можно записать в виде [189]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M(v)}{r} + \frac{\alpha}{\exp\left(\frac{r}{-\alpha l + 2\sigma}\right)^2} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (1.163)$$

Чтобы показать, что уравнения Эйнштейна легко разделяются, выпишем ненулевые компоненты тензора Эйнштейна

$$\begin{aligned}
 G_0^0 &= \frac{\alpha (\alpha l + 2r - 2\sigma) \exp\left(\frac{2r}{\alpha l - 2\sigma}\right)}{r^2 (\alpha l - 2\sigma)}, \\
 G_0^1 &= \frac{2\dot{M}(v)}{r^2}, \\
 G_1^1 &= \frac{\alpha (\alpha l + 2r - 2\sigma) \exp\left(\frac{2r}{\alpha l - 2\sigma}\right)}{r^2 (\alpha l - 2\sigma)}, \\
 G_2^2 &= \frac{2\alpha (\alpha l + 2r - 2\sigma) \exp\left(\frac{2r}{\alpha l - 2\sigma}\right)}{r (\alpha l - 2\sigma)^2}, \\
 G_3^3 &= \frac{2\alpha (\alpha l + 2r - 2\sigma) \exp\left(\frac{2r}{\alpha l - 2\sigma}\right)}{r (\alpha l - 2\sigma)^2}.
 \end{aligned} \tag{1.164}$$

Откуда видно, что компоненты тензора Эйнштейна точно такие же как для аналогичной метрики Шварцшильда с дополнительными параметрами, а единственная отличная компонента G_1^0 соответствует плотности потока излучения

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}_{ik} &= \mu L_i L_k, \\
 L_i &= \delta_i^0.
 \end{aligned} \tag{1.165}$$

1.7 Регулярные черные дыры и гравитационное расщепление

Регулярные чёрные дыры Хэйворда (1.78), Бардина (1.15) и другие модели могут изменять свою внутреннюю структуру при наличии дополнительной материи. Более того, присутствие внешнего вещества может привести к замене регулярного центра на сингулярность. В качестве примера рассмотрим два известных решения — Хэйворда (1.78) и Бардина (1.15) — и покажем, как структура чёрной дыры может изменяться при применении метода гравитационного расщепления.

1.7.1 Чёрная дыра Хэйворда и гравитационное расщепление

В качестве основного решения возьмём регулярную чёрную дыру Хэйворда (1.78) и исследуем, как её структура изменяется при наличии дополнительного вещества. Метрика имеет вид:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr^2}{r^3 + 2l^2M} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2Mr^2}{r^3 + 2l^2M} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1.166)$$

Вблизи центра ($r \rightarrow 0$) решение Хэйворда обладает де Ситтеровским ядром и ведёт себя как

$$f(r) \simeq 1 - \frac{r^2}{l^2}, r \rightarrow 0. \quad (1.167)$$

Компоненты тензора Эйнштейна в метрике Хэйворда имеют вид

$$G_0^0 = G_1^1 = - \frac{12M^2l^2}{(2l^2M + r^3)^2} \quad (1.168)$$

$$G_2^2 = G_3^3 = - \frac{24(l^2M - r^3)M^2l^2}{(2l^2M + r^3)^3} \quad (1.169)$$

Это решение в качестве источника материи имеет следующие плотность энергии и давление

$$\begin{aligned} \rho = -T_0^0 &= \frac{1}{8\pi} \frac{12M^2l^2}{(2Ml^2 + r^3)^2}, \\ P_r = T_1^1 &= - \frac{1}{8\pi} \frac{12M^2l^2}{(2Ml^2 + r^3)^2}, \\ P_t = T_2^2 = T_3^3 &= \frac{1}{8\pi} \frac{24M^2l^2(r^3 - Ml^2)}{(2Ml^2 + r^3)^3}, \end{aligned} \quad (1.170)$$

Мы можем формально написать уравнение состояния в виде

$$\begin{aligned} P_r &= -\rho, \\ P_t &= \frac{2(r^3 - Ml^2)}{r^3 + 2Ml^2} \rho. \end{aligned} \quad (1.171)$$

Теперь мы применим метод гравитационного расщепления и предположим, что распределение материи задается тензором энергии-импульса

$$\hat{T}_{ik} = 8\pi(T_{ik} + \alpha\Theta_{ik}), \quad (1.172)$$

Здесь T_{ik} тензор энергии импульса соответствующий регулярной черной дыре Хэйворда (1.170). Тензор энергии импульса θ_{ik} соответствует дополнительному распределению материи. Мы можем взять его как в известном решении Шварцшильда полученного при помощи гравитационного расщепления

$$\tilde{P}_r = -\tilde{\rho} = -\frac{r-M}{8\pi M r^2} \alpha e^{-\frac{r}{M}}, \quad (1.173)$$

$$\tilde{P}_t = \frac{r-2M}{16\pi M^2 r} \alpha e^{-\frac{r}{M}},$$

Решая уравнение Эйнштейна $\tilde{G}_{ik} = 8\pi\alpha\Theta_{ik}$ для сферически-симметричного распределения вещества (1.173), мы приходим к решению

$$\begin{aligned} ds^2 &= -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2, \\ f(r) &= 1 - \frac{\alpha L}{r} + \alpha e^{-\frac{r}{M}}. \end{aligned} \quad (1.174)$$

Теперь, решая уравнение Эйнштейна $\hat{G}_{ik} = \tilde{G}_{ik} + G_{ik} = \hat{T}_{ik}$ для композиции тензора энергии импульса (1.170) и (1.173), мы приходим к решению

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left(1 - \frac{2M r^2}{2l^2 M + r^3} - \frac{\alpha L}{r} + \alpha \exp\left(\frac{-r}{M}\right) \right) dt^2 \\ &+ \left(1 - \frac{2M r^2}{2l^2 M + r^3} - \frac{\alpha L}{r} + \alpha \exp\left(\frac{-r}{M}\right) \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \end{aligned} \quad (1.175)$$

Если мы положим $l = 0$, то приходим к метрике Шварцшильда, полученной методом гравитационного расщепления. Однако, как видно решение (1.175) уже не описывает регулярную черную дыру. Это уже видно из того, что массовая функция в нуле не обращается в ноль. Скаляр Кречмана при $r \rightarrow 0$, очевидно обращается в бесконечность

$$\lim_{r \rightarrow 0} K \equiv R_{iklm} R^{iklm} = \infty, \quad (1.176)$$

Таким образом, чтобы влияние дополнительной материи не приводило к образованию сингулярности, нужно рассматривать тензор энергии-импульса отличный от (1.173). Для того, чтобы материя не имела влияние на ядро де Ситтера, можно пойти двумя путями

- Мы можем рассмотреть возмущение метрики Хэйворда

$$1 - \frac{2Mr^2}{r^3 + 2Ml^2} \rightarrow 1 - \frac{2Mr^3}{r^3 + 2Ml^2} + \alpha g(r), \quad (1.177)$$

и подобрать функцию $g(r)$ таким образом, чтобы получилось регулярное решение. Например, мы можем подобрать эту функцию в виде

$$g(r) = e^{-\frac{r^3 + 2Ml^2}{r^2 M}}, \quad (1.178)$$

Тогда метрика

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M r^2}{2l^2 M + r^3} + \alpha \exp \left(\frac{-2l^2 M - r^3}{r^2 M} \right) \right) dt^2 \quad (1.179)$$

$$+ \left(1 - \frac{2M r^2}{2l^2 M + r^3} + \alpha \exp \left(\frac{-2l^2 M - r^3}{r^2 M} \right) \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

описывает регулярную черную дыру. Недостаток такого метода очевиден: мы можем найти сколь угодно много функций $g(r)$, чтобы получить регулярную черную дыру, но физический смысл подобных решений крайне сложно, если вообще возможно, выявить. Поэтому, рассматривая подобный подход как не физичный, мы его в дальнейшем рассматривать не будем.

- Второй подход заключается в том, чтобы сначала предположить вид тензора энергии-импульса, а уже потом, решая уравнения Эйнштейна, найти изменения вызванные наличием этой материи. Мы предполагаем метрику Хэйворда с возмущениями в следующем виде

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr^2}{r^3 + 2Ml^2} + G(r) \right) dt^2 + \quad (1.180)$$

$$\left(1 - \frac{2Mr^2}{r^3 + 2Ml^2} + G(r) \right) dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Тензор энергии импульса соответствующий этой метрике является комбинацией тензора энергии-импульса, являющимся источником метрики Хэйворда и тензора энергии-импульса ответственного за геометрические деформации, т.е.

$$\hat{T}_{ik} = 8\pi(T_{ik} + \theta_{ik}), \quad (1.181)$$

Где T_{ik} есть (1.170), а Θ_{ik} соответствует распределению материи вызывающие деформации $g(r)$. В качестве простого примера, тензор Θ_{ik} можно выбрать в качестве анизотропного вакуума, который определяется, как такой вид материи, которая не допускает никакой предпочтительной системы отсчета, связанной с ней. Это означает, что любая система отсчета есть сопутствующая система отсчета. Из вида метрики (1.180), видно, что тензор энергии импульса связанный с деформациями должен подчиняться условию аддитивности и линейности, что приводит к следующим соотношениям

$$\Theta_0^0 = \Theta_1^1, \quad \Theta_2^2 = \Theta_3^3. \quad (1.182)$$

Тензор энергии-импульса, удовлетворяющий подобным соотношениям, согласно классификации Петрова, имеет бесконечный набор сопутствующих систем. Мы также предположим, что плотность энергии задается формулой

$$\rho = -\Theta_0^0 = \varepsilon_0 e^{-\frac{r^3}{\alpha L \lambda^2}}, \quad (1.183)$$

Здесь ε_0 не нулевая плотность энергии вакуума, а λ связана с этой плотностью посредством соотношения де Ситтера

$$\lambda^2 = \frac{3c^4}{8\pi G \varepsilon_0}. \quad (1.184)$$

Уравнения Эйнштейна для пространства-времени (1.180) с тензором энергии импульса (1.181) в предположении (1.183), приводит к следующему дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{r^2} (G'r + G) = -\varepsilon_0 e^{-\frac{r^3}{\alpha L \lambda^2}}. \quad (1.185)$$

Решением которого является [54]

$$G(r) = -\frac{\alpha L}{r} \left(1 - e^{-\frac{r^3}{\alpha L \lambda^2}} \right). \quad (1.186)$$

Что представляет собой решение Дымниковой (1.84). Теперь, решая уравнения Эйнштейна, соответствующие комбинации тензоров энергии-

импульса $\hat{G}_{ik} = \hat{T}_{ik}$, мы приходим к пространству-времени в виде

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M r^2}{2l^2 M + r^3} - \frac{\alpha L \left(1 - e^{-\frac{r^3}{\alpha L \lambda^2}} \right)}{r} \right) dt^2$$

$$+ \left(1 - \frac{2M r^2}{2l^2 M + r^3} - \frac{\alpha L \left(1 - e^{-\frac{r^3}{\alpha L \lambda^2}} \right)}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1.187)$$

Здесь L - имеет размерность длины и может быть интерпретирован как дополнительный параметр характеризующий черную дыру. Это решение ведет себя в центре как решение де Ситтера

$$f(r) \simeq 1 + \left(-\frac{1}{l^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) r^2, r \rightarrow 0, \quad (1.188)$$

На бесконечности решение ведет себя как метрика Шварцшильда (1.1)

$$f(r) \simeq 1 + \frac{-\alpha L - 2M}{r}, r \rightarrow \infty, \quad (1.189)$$

Не нулевые компоненты тензора Эйнштейна для метрики (1.187) имеют вид

$$\hat{G}_0^0 = \hat{G}_1^1 = \frac{-12 \left(l^2 M + \frac{r^3}{2} \right)^2 e^{-\frac{r^3}{\alpha L \lambda^2}} - 12 \lambda^2 M^2 l^2}{\lambda^2 (2l^2 M + r^3)^2},$$

$$\hat{G}_2^2 = \hat{G}_3^3 = \frac{-3}{\lambda^4 L \alpha \left(l^2 M + \frac{r^3}{2} \right)^3} \left(\left(\alpha L \lambda^2 - \frac{3r^3}{2} \right) \times \right. \quad (1.190)$$

$$\left. \left(l^2 M + \frac{r^3}{2} \right)^3 e^{-\frac{r^3}{\alpha L \lambda^2}} + l^2 M^2 \alpha L \lambda^4 (l^2 M - r^3) \right).$$

Метрику (1.187) можно интерпретировать как композицию решений Хэйворда и Дымниковой. Это решение описывает регулярную черную дыру со скаляром Кречманна при $r \rightarrow 0$ в виде

$$\lim_{r \rightarrow 0} R_{iklm} R^{iklm} = \frac{24}{\lambda^4} + \frac{48}{\lambda^2 l^2} + \frac{24}{l^4}, \quad (1.191)$$

Тензор энергии импульса пространства-времени (1.187) имеет следующий вид

$$\begin{aligned}\hat{\rho} = -\hat{P}_r \rightarrow -\hat{T}_0^0 = -\hat{T}_1^1 = \varepsilon_0 e^{-\frac{r^3}{\alpha L \lambda^2}} + \\ + \frac{1}{8\pi} \frac{12M^2 l^2}{(2Ml^2 + r^3)^2} \equiv -T_0^0 - \Theta_0^0,\end{aligned}\tag{1.192}$$

$$\begin{aligned}\hat{P}_t = \hat{T}_2^2 = \hat{T}_3^3 = \frac{1}{8\pi} \frac{24M^2 l^2 (r^3 - Ml^2)}{(2Ml^2 + r^3)^3} + \\ + \frac{1}{8\pi} \frac{3r^3 - 2\alpha L \lambda^2}{2\alpha L \lambda^2} \varepsilon_0 e^{-\frac{r^3}{\alpha L \lambda^2}} = T_2^2 + \Theta_2^2.\end{aligned}$$

Мы ввели эффективные плотность энергии $\hat{\rho}$, радиальное \hat{P}_r и тангенциальное \hat{P}_t составляющие давления.

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \rho^{hayward} + \rho^{dymnikova}, \\ \hat{P}_r &= P_r^{hayward} + P_r^{dymnikova}, \\ \hat{P}_t &= P_t^{hayward} + P_t^{dymnikova}.\end{aligned}\tag{1.193}$$

Таким образом применение гравитационного расщепления к метрике Хэйворда с анизотропным тензором энергии-импульса, представляющим собой вакуумную среду есть снова регулярная черная дыра, которая есть суперпозиция решений Дымниковой и Хэйворда.

1.7.2 Гравитационное расщепление и метрика Бардина

Аналогичные выкладки могут быть применены и к метрике Бардина (1.15)

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M r^2}{(g^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M r^2}{(g^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{1.194}$$

Можно также убедиться, что тензор энергии-импульса (1.173) приводит к решению описывающее сингулярную черную дыру. Для того, чтобы решение было вновь регулярным, мы предположим ту же форму тензора энергии-импульса дополнительной материи, как и в случае метрики Хэйворда (1.183).

Не нулевые компоненты тензора Эйнштейна для метрики Бардина имеют следующий вид

$$G_0^0 = G_1^1 = -\frac{6M E^2}{(E^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad (1.195)$$

$$G_2^2 = G_3^3 = -\frac{6E^2 \left(E^2 - \frac{3r^2}{2}\right) M}{(E^2 + r^2)^{\frac{7}{2}}}.$$

Источником этого решения является следующее распределение вещества

$$T_0^0 = T_1^1 = -\frac{1}{4\pi} \frac{6M E^2}{(E^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$T_2^2 = T_3^3 = -\frac{1}{4\pi} \frac{6E^2 \left(E^2 - \frac{3r^2}{2}\right) M}{(E^2 + r^2)^{\frac{7}{2}}}. \quad (1.196)$$

Предполагая дополнительную материю в виде анизотропного вакуума, мы приходим к решению, которое является композицией решений Бардина и Дымниковой

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M r^2}{(E^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\alpha L \left(1 - e^{-\frac{r^3}{\alpha L \lambda^2}}\right)}{r} \right) dt^2$$

$$+ \left(1 - \frac{2M r^2}{(E^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\alpha L \left(1 - e^{-\frac{r^3}{\alpha L \lambda^2}}\right)}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.197)$$

Это решение имеет ядро де Ситтера в центре

$$f(r) \simeq 1 + \left(-\frac{2M}{E^3} - \frac{1}{\lambda^2} \right) r^2, r \rightarrow 0, \quad (1.198)$$

и Шварцшильдовский предел на бесконечности

$$f(r) \simeq 1 + \frac{-\alpha L - 2M}{r}, r \rightarrow \infty, \quad (1.199)$$

Не нулевые компоненты тензора Эйнштейна для метрики (1.197) имеют следующий вид

$$G_0^0 = G_1^1 = \frac{-3 \left((E^2 + r^2)^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{r^3}{\alpha L \lambda^2}} + 2E^2 M \lambda^2 \right)}{(E^2 + r^2)^{\frac{5}{2}} \lambda^2},$$

$$G_2^2 = G_3^3 = \frac{-3}{(E^2 + r^2)^{\frac{7}{2}} \lambda^4 \alpha L} \left((E^2 + r^2)^{\frac{7}{2}} \times \right. \quad (1.200)$$

$$\left. \left(\alpha L \lambda^2 - \frac{3r^3}{2} \right) e^{-\frac{r^3}{\alpha L \lambda^2}} + 2\alpha L \left(E^2 - \frac{3r^2}{2} \right) \lambda^4 E^2 M \right)$$

Скаляр Кречманна конечен при $r \rightarrow 0$ и имеет следующий вид

$$\lim_{r \rightarrow 0} R_{iklm} R^{iklm} = \frac{24 (E^3 + 2M \lambda^2)^2}{\lambda^4 E^6}, \quad (1.201)$$

Таким образом, удалось показать, что гравитационное расщепление может приводить к регулярным черным дырам только если тензор энергии-импульса дополнительной материи представляет собой вакуумно-подобное вещество. В иных случаях, изначально регулярный центр может перестать существовать в виду формирования сингулярности.

Полученные решения, представляющие собой суперпозицию решений Хэйворда и Дымниковой, а также Бардина и Дымниковой, обладают важной особенностью: массовая функция обращается в ноль в центре ($r \rightarrow 0$) не при любых значениях параметров, как это имеет место в классических регулярных черных дырах Хэйворда и Бардина, а лишь при определённых значениях параметров. Такая зависимость характерна для решений Дымниковой и регулярных черных дыр, источником которых является вещество Хэйдждорна.

Поскольку при одних значениях параметров черная дыра является регулярной, а при других — сингулярной, появляется возможность описать оба типа черных дыр в рамках одного решения. Более того, при рассмотрении динамического случая, когда параметры становятся функциями времени, можно подобрать такие зависимости, при которых массовая функция обращается в ноль лишь в определённые моменты времени. Это приводит к периодиче-

скому возникновению и исчезновению сингулярности, что указывает на её гравитационную слабость. Подобное поведение будет подробно рассмотрено в главе, посвящённой динамическим чёрным дырам.

В рамках статического случая представляет интерес исследование свойств тени этих черных дыр, поскольку оно может помочь выявить наблюдательные различия между сингулярными и регулярными черными дырами. Однако, как уже отмечалось выше, такое рассмотрение представляет интерес скорее с математической, чем с физической точки зрения. Дело в том, что все эти решения справедливы лишь вблизи центра и должны быть сшиты с другим решением уравнений Эйнштейна, описывающим внешнюю геометрию. Именно тень чёрной дыры во внешнем пространстве-времени должна подвергаться наблюдательному анализу. Однако по свойствам тени невозможно определить, является ли центр сингулярным или регулярным, поскольку тень нечувствительна к процедуре сшивки.

Следует подчеркнуть, что под сшивкой двух решений понимается физический переход от одного типа вещества к другому, сопровождающийся потоками энергии и импульса. Исследование этих потоков может помочь ответить на фундаментальный вопрос: могут ли в природе существовать регулярные чёрные дыры?

Результаты исследований, описанных в этой главе, были опубликованы в следующих статьях:

- Исследование процесса Пенроуза для заряженных частиц отображено в статье [190].

- Новые модели регулярных черных дыр с источником в виде вещества Хагедорна и уравнениями состояния с линейно зависящим от радиальной координаты коэффициентом были опубликованы в статье [37];

- Оценка извлекаемой энергии в результате эффекта Банадоса–Силка–Веста в метрике Бардина была опубликована в статье [112];

- Влияние дополнительной материи на структуру черных дыр Бардина и Хэйворда представлено в статье [54].

Глава 2

Образование регулярных черных дыр

В конце своего жизненного пути массивная звезда, исчерпав запасы внутреннего топлива, подвергается непрерывному гравитационному коллапсу. В зависимости от массы звезды этот процесс может приводить к образованию белых карликов, нейтронных звёзд или черных дыр. Первыми, кто построил модель гравитационного коллапса, результатом которого становится черная дыра, были Оппенгеймер и его аспирант Снейдер [4]. Они рассмотрели коллапс шара, состоящего из однородной пыли.

Позднее при изучении аналогичного процесса с неоднородным распределением материи было установлено, что такой коллапс может привести также к образованию голых сингулярностей [6, 8, 9]. Эти объекты, хотя и существуют лишь краткий миг, могут передавать внешнему наблюдателю информацию о процессах, происходящих в окрестности столь плотных образований. Более того, голые сингулярности могут иметь прямые астрофизические следствия, поскольку их формирование может быть источником мощных гамма-всплесков [191].

Гравитационный коллапс может приводить не только к возникновению временных голых сингулярностей, но и к так называемым вечным голым сингулярностям [192, 193] — сингулярностям, которые формируются в результате коллапса и никогда не оказываются покрытыми горизонтом событий.

Тем не менее, как неоднократно отмечалось ранее, существование сингулярностей указывает на то, что общая теория относительности уже не является адекватной теорией для описания таких объектов. Следовательно, на поздних стадиях коллапса вещество либо не сжимается полностью в сингулярность, образуя сверхплотное тело конечного (бесконечно малого, но ненулевого) объема, либо происходит фазовый переход к вакуумоподобной субстанции, в результате чего формируется регулярный центр.

Все рассуждения о том, что голые сингулярности могут быть доступны для наблюдения внешним наблюдателем, остаются применимыми и к случаю регулярного центра. Более того, образование ядра де Ситтера, не прикрытого горизонтом, из-за большого отрицательного давления может приводить к значительным выбросам энергии, что также может быть связано с гамма-всплесками. Таким образом, гравитационный коллапс, приводящий к образованию регулярных черных дыр, представляет интерес не только с точки зрения теоретической физики, но и с точки зрения астрофизики.

Однако модели регулярных черных дыр предполагают существование экзотической материи, предотвращающей формирование сингулярности. Статические модели, описанные в предыдущей главе, не объясняют механизм возникновения этой материи. Более того, рассмотрение динамических черных дыр открывает новые свойства, отсутствующие в статических моделях.

В данной главе рассматриваются модели гравитационного коллапса, которые могут приводить к образованию регулярных черных дыр.

2.1 Обобщенная метрика Вайдья

Одной из самых простых моделей динамических черных дыр является метрика Вайдья [153]:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M(v)}{r} \right) dv^2 + 2\varepsilon dv dr + r^2 d\Omega^2, \quad (2.1)$$

где $M(v)$ — масса черной дыры, зависящая от времени Эддингтона v . Параметр ε принимает значение $+1$ для падающего излучения и -1 для исходящего. При $\varepsilon = +1$ масса черной дыры возрастает, а при $\varepsilon = -1$ —

уменьшается, что соответствует излучению Хокинга. Единственной ненулевой компонентой тензора энергии-импульса является T_1^0 , соответствующая излучению. Поэтому метрика Вайдья также известна как излучающая метрика Шварцшильда:

$$T_1^0 = \varepsilon \frac{2\dot{M}}{r^2}. \quad (2.2)$$

Метрика Вайдья широко используется в астрофизике для описания сильных гравитационных полей. Она представляет собой внешнюю метрику излучающей звезды. Поскольку давление на поверхности звезды отлично от нуля, звезда рассеивает энергию в виде теплового излучения, что делает возможным изучение диссипативных и физических процессов, связанных с гравитационным коллапсом.

Масса черной дыры в метрике Вайдья является функцией времени. Обобщение этой метрики на случай, когда массовая функция зависит как от времени v , так и от радиальной координаты r , приводит к так называемой обобщённой метрике Вайдья [156]:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M(v, r)}{r} \right) dv^2 + 2\varepsilon dv dr + r^2 d\Omega^2. \quad (2.3)$$

Наличие недиагонального члена в обобщённой и стандартной метриках Вайдья может указывать на существование области, в которой могут присутствовать частицы с отрицательной энергией — эффект, наблюдаемый также в случае вращающихся и заряженных черных дыр [107, 109, 110, 117]. Однако было показано, что отрицательные энергии отсутствуют в обобщённой метрике Вайдья [194]. Тем не менее, можно ввести понятие обобщённой эргообласти и заряженного аналога эффекта Пенроуза для заряженного решения Вайдья [107].

Тензор энергии-импульса для метрики (2.3) представляет собой комбинацию излучения и материи.

$$T_{ik}^{total} = T_{ik}^{(r)} + T_{ik}^{(m)}, \quad (2.4)$$

где (r) означает излучение, а (m) соответствует материи. Эти компоненты в явном виде можно записать как

$$\begin{aligned}
T_{ik}^{(r)} &= \mu n_i n_k, \\
T_{ik}^{(m)} &= (\rho + P)(a_i b_k + a_k b_i) + P g_{ik}, \\
\mu &= \frac{2\dot{M}}{r^2}, \\
\rho &= \frac{2M'}{r^2}, \\
P &= -\frac{M''}{r}, \\
a_i &= \delta_i^0, \\
b_i &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \delta_i^0 - \delta_i^1, \\
a_i a^i &= b_i b^i = 0, \\
b_i a^i &= -1.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь ρ и P — плотность энергии и давление вещества, μ — плотность потока энергии, а a^i и b^i — два изотропных вектора.

В статическом случае границей черной дыры является горизонт событий. Однако в статическом случае горизонт событий определяется глобально для всех возможных событий. В динамических системах невозможно глобально определить горизонт событий, поскольку динамические процессы могут приводить к тому, что одни события остаются наблюдаемыми, а другие — нет. В связи с этим в динамических пространствах-времени понятие горизонта событий может быть определено только квази-локально [102, 161, 195, 196], как изотропная поверхность.

Ниже мы обсудим связь изотропной поверхности в динамическом случае с энергетическими условиями. В динамических черных дырах понятие горизонта событий заменяется на так называемый горизонт видимости, который представляет собой границу ловушечной области. Первоначально предполагалось, что горизонт видимости является замкнутой пространственно-подобной поверхностью. Однако нарушение слабого энергетического условия приводит к тому, что он может быть как изотропным, так и времени-подобным.

Напомним, что нарушение слабого энергетического условия, как показал Хокинг, может быть вызвано наличием квантовых полей вблизи горизонта [197].

Кратко напомним, как определяется горизонт видимости. Рассмотрим конгруэнцию геодезических с касательным 4-вектором l^i . Пусть вектор l^i аффинно параметризован. Это означает, что он параллельно переносится вдоль геодезической, то есть выполняется условие:

$$l^i{}_{;k}l^k = 0. \quad (2.6)$$

Мы не конкретизируем тип вектора — изотропный, времени-подобный или пространственно-подобный. Однако следует отметить, что в случае изотропных геодезических необходимо ввести дополнительный изотропный вектор n^i , который не обязан быть аффинно параметризованным. При этом его выбор не влияет на последующие выкладки.

Рассмотрим тензор $l_{i;k}$. Его можно разложить на симметричную Σ_{ik} и антисимметричную ω_{ik} части:

$$l_{i;k} = \Sigma_{ik} + \omega_{ik}. \quad (2.7)$$

Антисимметричная часть ω_{ik} называется тензором вращения. Симметричную часть, в свою очередь, можно разложить на следующие компоненты: симметричную бесследовую часть и след:

$$\Sigma_{ik} = \sigma_{ik} + \frac{1}{2}\Theta h_{ik}, \quad (2.8)$$

где бесследовый тензор σ_{ik} называется сдвигом, а Θ — расширением. Здесь h_{ik} — метрика на двумерной поверхности, перпендикулярной конгруэнции геодезических, которая определяется как

$$h_{ik} = g_{ik} + l_i n_k + l_k n_i. \quad (2.9)$$

Рассмотрим, для примера, такую конгруэнцию геодезических, поперечным сечением которой является окружность, и исследуем, как изменяется это сечение при движении вдоль конгруэнции. Тензор вращения ω_{ik} , как следует из его названия, отвечает за вращение окружности без изменения её площади (или объёма). Сдвиг σ_{ik} отвечает за деформацию окружности, также без

изменения площади (объёма), а расширение Θ отвечает за изменение площади (объёма) без деформаций. Именно расширение играет ключевую роль при определении горизонта видимости.

Рассмотрим две конгруэнции геодезических: входящую n и исходящую l . Поверхность σ называется ловушечной, если оба расширения Θ_l и Θ_n отрицательны. Поверхность σ называется маргинально ловушечной, или горизонтом видимости, если выполняется условие:

$$\Theta_n < 0, \quad \Theta_l = 0. \quad (2.10)$$

В обобщённой метрике Вайдья расширения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Theta_l &= \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2M(v, r)}{r} \right), \\ \Theta_n &= -\frac{2}{r}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Из этого следует, что уравнение для радиуса горизонта видимости:

$$r_{\text{ah}} = 2M(v, r_{\text{ah}}). \quad (2.12)$$

Теперь попробуем определить горизонт событий в обобщённой метрике Вайдья (2.3). Горизонт событий определяется как множество событий, которые являются причинным прошлым будущей изотропной бесконечности и порождается изотропными геодезическими, которые не достигают бесконечности. Горизонт событий всегда является изотропной поверхностью, поскольку представляет собой причинную границу.

В обобщённом пространстве-времени Вайдья (2.3) координата v постоянна вдоль входящих радиальных изотропных геодезических. Любая исходящая радиальная изотропная геодезическая должна удовлетворять условию:

$$\frac{dr}{d\lambda} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dv}{d\lambda}, \quad (2.13)$$

где λ — аффинный параметр.

Рассмотрим обобщённую метрику Вайдья в случае аккреции, то есть при $\varepsilon = +1$. В этом случае можно приближённо определить положение горизонта событий, если наложить следующие условия:

$$\frac{d^2v}{dr^2} = 0. \quad (2.14)$$

Это условие означает, что горизонт событий эволюционирует с постоянной скоростью. Беря вторую производную от (2.13):

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{d^2v}{d\lambda^2} + \left(\frac{M}{r^2} - \frac{M'}{r}\right) \frac{dv}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} - \frac{\dot{M}}{r} \left(\frac{dv}{d\lambda}\right)^2, \quad (2.15)$$

и накладывая условия

$$\frac{d^2v}{d\lambda^2} = 0, \quad \frac{d^2r}{d\lambda^2} = 0, \quad (2.16)$$

мы приходим к следующему уравнению:

$$\left(\frac{M}{r^2} - \frac{M'}{r}\right) \frac{dv}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} - \frac{\dot{M}}{r} \left(\frac{dv}{d\lambda}\right)^2 = 0. \quad (2.17)$$

Теперь, используя (2.13), находим

$$\left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{M}{r^2} - \frac{M'}{r}\right) - \frac{\dot{M}}{r}\right] = 0. \quad (2.18)$$

Наконец, мы приходим к уравнению, которое определяет квази-локальное положение горизонта событий в обобщённой метрике Вайдья (2.3):

$$(2\dot{M} + M')r^2 - M(1 + 2M')r + 2M^2 = 0. \quad (2.19)$$

Очевидно, что в общем случае невозможно точно определить r_{ah} . Для точного определения необходимо знать явный вид массовой функции $M(v, r)$, что требует решения уравнений Эйнштейна.

В качестве примера рассмотрим решение Хусейна [198], которое получается для случая баротропного уравнения состояния $P = \alpha\rho$, где $\alpha \in [-1, 1]$ и $\alpha \neq \frac{1}{2}$. В этом случае массовая функция имеет вид:

$$M(v, r) = M_1(v) + \rho_0(v)r^{1-2\alpha}, \quad (2.20)$$

где M_1 и ρ_0 — функции интегрирования, зависящие от времени, которые можно интерпретировать как массу чёрной дыры и плотность энергии соответственно¹

¹Важно отметить, что вторая функция формально связана с плотностью энергии, но физический смысл может варьироваться в зависимости от конкретного решения.

Для решения Хусейна можно найти квази-локальное положение горизонтов событий. Однако при некоторых значениях α оказывается, что горизонт событий расположен внутри пространственно-подобного горизонта видимости, что противоречит результатам, полученным в работе [161]. Более того, как будет строго доказано ниже, светоподобная поверхность всегда находится внутри пространственно-подобной поверхности, если внешний горизонт времени-подобен. светоподобная поверхность может содержать пространственно-подобный горизонт видимости только в случае, когда внешний горизонт видимости сам является светоподобной поверхностью.

Решение Хусейна было подробно исследовано в ряде работ, и было показано, что гравитационный коллапс может приводить к образованию голой сингулярности, а также к образованию сингулярности, которая никогда не будет покрыта горизонтом [192, 193, 199, 200].

Рассмотрим в качестве примера процесс, приводящий к образованию голой сингулярности, которая не будет покрыта горизонтом [193]. Этот процесс можно проиллюстрировать на примере решения Хусейна в случае предельно жёсткого уравнения состояния $P = \rho$, которое в последнее время рассматривается как уравнение состояния ранней Вселенной при доминировании кинетического члена скалярного поля над потенциальным [201].

Массовая функция в случае предельно жёсткого уравнения состояния может быть записана в виде

$$M(v, r) = C(v) - \frac{D(v)}{r}. \quad (2.21)$$

При этом, функция $D(v)$ должна быть положительной, чтобы сохранить выполнение слабых энергетических условий. Более того, необходимо потребовать постоянство этой функции, если мы хотим обеспечить выполнение светоподобных энергетических условий во всём пространстве-времени. Поэтому, мы запишем:

$$D(v) \equiv \mu. \quad (2.22)$$

Уравнение горизонта видимости имеет вид:

$$\frac{2C(v)}{r} - \frac{2\mu}{r^2} - 1 = 0. \quad (2.23)$$

Для того чтобы голая сингулярность могла образоваться, необходимо выполнение следующих условий:

- Время образования сингулярности должно быть меньше времени образования горизонта видимости;

- должно существовать семейство непространственно-подобных направленных в будущее геодезических, обрывающихся в прошлом в центральной сингулярности.

Однако, если выполняются условия

$$C^2(v) < 2\mu, \quad (2.24)$$

то горизонт видимости никогда не сформируется. Таким образом, в результате гравитационного коллапса образуется сингулярность, которая никогда не будет покрыта горизонтом. Тем не менее, как мы уже отмечали, понятие сингулярности следует заменить на понятие регулярного центра или сверхплотного объекта бесконечно малого радиуса β , о чём пойдёт речь ниже в соответствующих параграфах.

Однако случай баротропного уравнения состояния является идеализированным. Более физически обоснованным уравнением состояния является политропное уравнение состояния [202]:

$$P = \alpha\rho^\gamma, \quad (2.25)$$

где $\alpha \in [-1, 1]$, а γ может быть представлено в виде:

$$\gamma = 1 + \frac{1}{n}, \quad (2.26)$$

где n — индекс политропы. Если $\gamma = 1$, то мы получаем решение Хусейна. Мы же предположим, что $\gamma \neq 1$.

Политропное уравнение состояния (2.25) приводит к следующему уравнению Эйнштейна:

$$M'' + 2^\gamma \alpha \frac{(M')^\gamma}{r^{2\gamma-1}} = 0. \quad (2.27)$$

Чтобы решить это уравнение, введём новую переменную $W = M'$, тогда (2.27) принимает вид:

$$\begin{aligned} W' + 2^\gamma \alpha \frac{W^\gamma}{r^{2\gamma-1}} = 0 \rightarrow \\ W(v, r) = (D(v) - 2^{\gamma-1} \alpha r^{2-2\gamma})^{\frac{1}{1-\gamma}}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Здесь $D(v)$ — функция интегрирования. Из (2.28) мы легко можем найти массовую функцию:

$$M(v, r) = \int W dr + C(v), \quad (2.29)$$

где $C(v)$ — ещё одна функция интегрирования, связанная с массой чёрной дыры.

Поскольку $\gamma > 1$, очевидно, что политропное уравнение состояния не может приводить к образованию регулярного центра. Тем не менее, результатом гравитационного коллапса может быть голая сингулярность. Мы не будем здесь подробно останавливаться на аспектах формирования голой сингулярности в данном разделе. Отметим лишь, что случай $D(v) \equiv 0$ приводит к известному решению Вайдья–де Ситтера [203].

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2C(v)}{r} - (-1)^n \frac{\alpha^\xi r^2}{3} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2. \quad (2.30)$$

Другим приближением можно считать маленькие значения $D(v)$. В этом случае, раскладывая в ряд Тейлора, мы приходим

$$W \approx (-1)^{-n} \frac{\alpha^{-n} r^2}{2} - \frac{nD(v)}{2^{\frac{n+1}{n}} \alpha^{n+1}} r^{2\frac{n+1}{n}}. \quad (2.31)$$

Интегрируя это выражение, мы приходим к массовой функции в виде

$$\int W dr \approx (-1)^{-n} \frac{\alpha^{-n} r^3}{6} - \beta(v) r^{2\gamma+1}, \quad (2.32)$$

Где

$$\beta(v) = \frac{nD(v)}{(2\gamma + 1)2^\gamma \alpha^{n+1}}. \quad (2.33)$$

И пространство-время есть

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2C(v)}{r} - (-1)^{-n} \frac{\alpha^{-n}}{3} r^2 + 2\beta(v) r^{2\gamma} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2. \quad (2.34)$$

Полученное решение соответствует метрике Вайдья на расширяющемся космологическом фоне [204–206].

2.2 Структура горизонта видимости и его зависимость от энергетических условий

Эволюция горизонта видимости напрямую зависит от энергетических условий. Мы рассмотрим метрику наиболее общего сферически-симметричного динамического пространства-времени в виде:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M(v, r)}{r} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2. \quad (2.35)$$

Для этого пространства-времени светоподобные энергетические условия имеют вид:

$$\mu \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{M} \geq 0. \quad (2.36)$$

Это условие часто нарушается под горизонтом видимости. Например, известное решение Бонора–Вайдья, о котором пойдёт речь ниже, содержит области пространства-времени вблизи сингулярности, где это условие нарушается.

Рассмотрим следующую ситуацию: пусть пространство-время (2.35) асимптотически плоское, то есть

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 1. \quad (2.37)$$

Пусть также чёрная дыра, описываемая этим пространством-времени, имеет два горизонта. Как известно, два горизонта содержат большинство известных решений, таких как Боннор–Вайдья, Хэйворд, Бардин и другие, описывающие регулярные чёрные дыры [207]. Следовательно, описываемый ниже формализм, в первую очередь, относится к регулярным чёрным дырам.

Обозначим через r_+ и r_- внешний и внутренний горизонты видимости соответственно. Уравнения горизонтов видимости были выведены в предыдущем параграфе и имеют вид:

$$r_{\pm} = 2M(v, r_{\pm}). \quad (2.38)$$

Мы начнём наше рассмотрение с внешнего горизонта. Очевидно, что вне этого горизонта выполняется условие $r \geq 2M(v, r)$. Отсюда следует соотношение $1 - 2M'(v, r_+) \geq 0$, где равенство достигается в случае экстремальной

чёрной дыры. Мы исключаем из рассмотрения экстремальные чёрные дыры и ограничиваемся случаем $1 - 2M'(v, r_+) > 0$.

Между горизонтами выполняется условие $r < 2M(v, r)$, и можно записать $1 - 2M'(v, r_-) \leq 0$. Как и в случае внешнего горизонта видимости, равенство достигается в случае экстремальной чёрной дыры, и этот случай также исключается из рассмотрения.

Нас интересует вопрос о структуре этих горизонтов. Иными словами, мы хотим выяснить, является ли горизонт видимости пространственно-подобной, времени-подобной или светоподобной гиперповерхностью. Для этого подставим выражение (2.38) в метрику (2.35), что приводит к следующему выражению:

$$ds^2 = 2\dot{r}_\pm dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2. \quad (2.39)$$

Гиперповерхность $r = r_\pm$ является пространственно-подобной, времени-подобной или светоподобной, если $\dot{r}_\pm > 0$, $\dot{r}_\pm < 0$ или $\dot{r}_\pm = 0$ соответственно.

Выясним теперь вопрос о знаке \dot{r}_\pm . Для этого воспользуемся определением горизонта видимости и того факта, что сам горизонт видимости эволюционирует со временем, то есть является функцией времени:

$$\begin{aligned} \frac{dr_\pm}{dv} &= 2 \frac{d}{dv} [M(v, r_\pm)] = 2\dot{M}(v, r_\pm) + 2M'(v, r_\pm) \frac{dr_\pm}{dv} \rightarrow \\ \dot{r}_\pm &= \frac{2\dot{M}(v, r_\pm)}{1 - 2M'(v, r_\pm)}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Отсюда можно сделать следующие выводы:

- Внешний горизонт видимости является пространственно-подобной гиперповерхностью, если $\dot{M}(v, r_+) > 0$;
- Внешний горизонт видимости является светоподобной поверхностью, если $\dot{M}(v, r_+) = 0$;
- Внешний горизонт видимости является времени-подобной гиперповерхностью, если $\dot{M}(v, r_+) < 0$;
- Внутренний горизонт видимости является пространственно-подобной гиперповерхностью, если $\dot{M}(v, r_-) < 0$;
- Внутренний горизонт видимости является светоподобной гиперповерхностью, если $\dot{M}(v, r_-) = 0$;

- Внутренний горизонт видимости является времени-подобной гиперповерхностью, если $\dot{M}(v, r_-) > 0$.

Мы видим, что во всех шести случаях структура и поведение горизонтов видимости обусловлены поведением производной массовой функции. Напомним, что условие $\dot{M} \geq 0$ отвечает за выполнение слабых энергетических условий.

Определение. Горизонтом светоподобных энергетических условий, или, для краткости, горизонтом энергетических условий, называется гиперповерхность $r = r_{nec}$, удовлетворяющая следующему условию:

$$\sigma(r_{nec}) = 0 \rightarrow \dot{M}(v, r_{nec}) = 0. \quad (2.41)$$

Иными словами, горизонт энергетических условий — это граница, которая разделяет пространство-время на области, где светоподобные энергетические условия выполняются, и область, где они нарушаются.

Отметим следующий факт: когда светоподобные энергетические условия выполняются во всём пространстве-времени, то есть горизонт энергетических условий отсутствует, внешний горизонт видимости всегда является пространственно-подобной гиперповерхностью, которая расширяется, а внутренний горизонт видимости — это всегда времени-подобная гиперповерхность, которая сжимается. В пределе внутренний горизонт стремится к нулю, а вся метрика стремится к метрике Вайдья (2.1). Таким образом, можно сформулировать следующую теорему:

Теорема. Если светоподобные энергетические условия выполняются во всём пространстве-времени, то есть горизонт энергетических условий отсутствует, то метрика, описывающая чёрную дыру, асимптотически стремится к метрике Вайдья (2.1).

Предположим теперь, что внутри внутреннего горизонта видимости формируется горизонт энергетических условий, который расширяется. О динамике этого горизонта мы поговорим ниже. В этом случае можно рассмотреть следующую модель эволюции чёрной дыры:

- Горизонт энергетических условий расположен внутри внутреннего горизонта видимости. В этом случае внешний горизонт видимости является пространственно-подобной поверхностью и расширяется, а внутренний гори-

зонт видимости — времени-подобной гиперповерхностью и сжимается, стремясь к горизонту энергетических условий;

- Горизонт энергетических условий совпадает с внутренним горизонтом видимости. В этом случае внешний горизонт видимости по-прежнему остаётся пространственно-подобной гиперповерхностью и расширяется, а внутренний горизонт видимости, теперь, является светоподобной поверхностью и не эволюционирует;

- Горизонт энергетических условий располагается между двумя горизонтами видимости. В этом случае внешний и внутренний горизонты видимости имеют одинаковую структуру и оба являются пространственно-подобными, и оба расширяются;

- Горизонт энергетических условий совпадает с внешним горизонтом видимости. В этом случае внешний горизонт видимости становится светоподобной поверхностью, его эволюция останавливается, и его можно воспринимать (квази-локально) как горизонт событий динамической чёрной дыры. Внутренний горизонт видимости остаётся при этом пространственно-подобной гиперповерхностью и стремится к внешнему горизонту видимости;

- Горизонт энергетических условий содержит в себе динамическую чёрную дыру. Если все предыдущие случаи соответствовали эволюции чёрной дыры в случае аккреции (внешний горизонт был либо пространственно-подобной, либо светоподобной поверхностью, то есть не уменьшался), то этот случай соответствует испарению чёрной дыры. В этом случае внешний горизонт видимости становится времени-подобной гиперповерхностью и сжимается, а внутренний горизонт видимости — пространственно-подобной гиперповерхностью и расширяется. Таким образом, два горизонта видимости стремятся друг к другу и в некоторый момент времени $v = v_{\text{merge}}$ они сливаются и могут исчезнуть, оставляя после себя либо голую сингулярность, либо объект с регулярным центром. Как мы покажем ниже, испарение чёрной дыры не обязательно означает уменьшение её массы. Это может означать, что чёрная дыра приобретает больше электрического заряда, чем массы, что приводит к тому, что горизонт энергетических условий оказывается вне чёрной дыры.

У этого результата есть ещё одно важное следствие, связанное с парадоксом потери информации. Если мы рассматриваем испарение регулярной чёрной дыры, которая всегда обладает двумя горизонтами (мы не рассматриваем случай существования космологических горизонтов и предполагаем, что метрика пространства-времени асимптотически плоская), то её испарение всегда приводит либо к образованию так называемых ремнантов — остатков чёрных дыр, либо после исчезновения горизонтов остаётся объект, не обладающий горизонтами и имеющий регулярный центр. От этого объекта мы можем получать информацию в виде излучения. Таким образом, испарение регулярной чёрной дыры не приводит к плоскому пространству-времени Минковского.

Заметим, что мы рассмотрели ситуацию чёрной дыры с двумя горизонтами. Однако аналогичные выводы можно сделать и для чёрной дыры, обладающей большим количеством горизонтов. Мы не затрагиваем здесь вопрос о неасимптотически плоских пространствах-времени, поскольку природа поведения космологического горизонта, который стремится к внешнему горизонту видимости, уменьшая тем самым область внешнего взаимодействия, неясна.

Описанная ситуация, тем не менее, касается случая, когда эволюция горизонта энергетических условий происходит быстрее, чем эволюция внешнего горизонта видимости. Чтобы понять, возможна ли описываемая выше модель, необходимо разобраться в эволюции горизонта энергетических условий. Очевидно, что этот горизонт может не только расширяться, но также может сжиматься или иметь постоянное положение. Чтобы понять эволюцию горизонта энергетических условий, мы вспомним его определение: $\dot{M}(v, r_{\text{нec}}) = 0$. Возьмём производную по времени от этого уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dv} \left(\dot{M} \right) &= \ddot{M}(v, r_{\text{нec}}) + \dot{M}'(v, r_{\text{нec}}) \frac{dr_{\text{нec}}}{dv} = 0 \rightarrow \\ &\frac{dr_{\text{нec}}}{dv} = -\frac{\ddot{M}}{\dot{M}'}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Откуда видно, что горизонт энергетических условий может как расширяться, так и сжиматься. Любопытно также, что горизонт энергетических условий может не эволюционировать вовсе и оставаться постоянным. В данном случае, если он расположен внутри внутреннего горизонта видимости, он являет-

ся тем предельным расстоянием, к которому стремится внутренний горизонт, который сжимается.

Рассмотрим ряд примеров, которые демонстрируют, как работают полученные результаты.

2.2.1 Заряженная чёрная дыра Вайдья

Первый пример, который мы рассмотрим, касается эволюции заряженной чёрной дыры Вайдья, или чёрной дыры Бонора–Вайдья [208], представляющей собой динамическое обобщение чёрной дыры Рейснера–Нордстрёма:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M(v)}{r} + \frac{Q^2(v)}{r^2} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2. \quad (2.43)$$

Здесь $M(v)$ — масса чёрной дыры, а $Q(v)$ — её заряд. Массовая функция имеет вид:

$$M(v, r) = M(v) - \frac{Q^2(v)}{2r}. \quad (2.44)$$

Чёрная дыра Бонора–Вайдья обладает двумя горизонтами, которые задаются формулами:

$$r_{\pm} = M(v) \pm \sqrt{M^2(v) - Q^2(v)}. \quad (2.45)$$

Отсюда видно, что два горизонта могут существовать только в случае, когда масса больше заряда: $M(v) > Q(v)$. При равенстве мы получаем экстремальную чёрную дыру. Если же $Q > M$, то пространство-время будет содержать голую сингулярность. О том, что голая сингулярность может являться результатом гравитационного коллапса и эта сингулярность никогда не будет покрыта горизонтами видимости, показано в работе [193].

Если заряд чёрной дыры отличен от нуля и не убывает, то вблизи сингулярности будут нарушаться энергетические условия [209, 210], и из условия

$$\dot{M}(v, r) = \dot{M}(v) - \frac{Q\dot{Q}}{r} = 0, \quad (2.46)$$

мы получаем расположение горизонта энергетических условий:

$$r_{\text{нec}} = \frac{Q\dot{Q}}{\dot{M}}. \quad (2.47)$$

Мы знаем, что горизонт видимости может быть пространственно-подобным, времени-подобным или светоподобным, и это зависит от расположения горизонта энергетических условий. Поскольку в метрике Бонора–Вайдья расположение горизонтов даётся явно, мы можем явно продемонстрировать условия предыдущей теоремы.

Во-первых, стоит отметить, что энергетические условия выполняются во всём пространстве-времени, если заряд чёрной дыры уменьшается, либо в результате нейтрализации из окружающего чёрную дыру аккреционного диска, либо вследствие обобщенного процесса Пенроуза для заряженных частиц. Когда же заряд исчерпывается, $Q(v) \equiv 0$, то чёрная дыра (2.43) становится чёрной дырой Вайдья (2.1).

Найдём эволюцию горизонтов видимости в метрике Бонора–Вайдья:

$$\begin{aligned} \dot{r}_{\pm} &= \dot{M} \pm \frac{M\dot{M} - Q\dot{Q}}{\sqrt{M^2 - Q^2}} = \\ &= \dot{M} \left[1 \pm \frac{M - \frac{Q\dot{Q}}{\dot{M}}}{\sqrt{M^2 - Q^2}} \right] = \\ &= \frac{\dot{M}}{\sqrt{M^2 - Q^2}} [\pm r_{pm} \mp r_{nec}]. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Откуда видно, что горизонт видимости является светоподобной поверхностью, если $r_{\pm} = r_{nec}$, то есть если горизонт видимости совпадает с горизонтом энергетических условий — это было показано выше. Если же $r_{nec} > r_+$, то внутренний горизонт видимости является пространственно-подобной гиперповерхностью, а внешний — времени-подобной. В этом случае оба горизонта стремятся друг к другу и в определённый момент времени $v = v_{merge}$ они сливаются и исчезают, оставляя после себя голую сингулярность.

Эволюция горизонта энергетических условий, согласно (2.42), в случае метрики Бонора–Вайдья имеет вид:

$$-\frac{dr_{nec}}{dv} = \frac{\ddot{M}r^2 - \dot{Q}^2r - Q\ddot{Q}r}{Q\dot{Q}}. \quad (2.49)$$

Если рассмотреть, в качестве примера, линейные массовую функцию и заряд:

$$\begin{aligned} M(v) &= \mu v, \quad \mu > 0, \\ Q(v) &= \nu v, \end{aligned} \tag{2.50}$$

то уравнение (2.49) приводит к:

$$\frac{dr_{\text{нec}}}{dv} = \frac{r_{\text{нec}}}{v} > 0. \tag{2.51}$$

Следовательно, в случае линейных массовой функции и заряда горизонт энергетических условий расширяется.

Всего лишь в качестве педагогического примера приведём выбор массовой функции и заряда, при которых горизонт энергетических условий остаётся неизменным:

$$\begin{aligned} M(v) &= \mu v, \quad \mu > 0, \\ Q(v) &= -\nu e^{-v}, \quad \nu > 0. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Однако стоит понимать, что этот пример не имеет физического смысла и приведён здесь лишь для демонстрации того, что горизонт энергетических условий может не только расширяться, но и оставаться неизменным.

2.2.2 Регулярная чёрная дыра Хэйворда

В своей статье Хэйворд [30] предложил минимальную модель регулярной чёрной дыры, описывающую процесс образования и испарения чёрной дыры. Согласно его утверждению, когда чёрная дыра испаряется, результирующее пространство-время становится плоским — пространством Минковского. Однако в его рассуждениях не учитывалась эволюция внутреннего горизонта видимости.

Мы выше показали, что испарение регулярной чёрной дыры не приводит к плоскому пространству-времени. На примере метрики Хэйворда мы продемонстрируем это явно.

Хэйворд предложил модель динамической регулярной чёрной дыры для случая массы, зависящей от времени $M(v)$, и постоянной величины регуля-

ризации L . Мы рассмотрим более общий случай, когда параметр регуляризации также зависит от времени $L(v)$, хотя наши результаты справедливы и для постоянного L .

Метрика Хэйворда задаётся линейным элементом следующего вида:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M(v)r^2}{r^3 + 2M(v)L^2(v)} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2. \quad (2.53)$$

Чёрная дыра Хэйворда содержит два горизонта, явный вид которых мы не будем приводить здесь. Вместо этого воспользуемся формализмом, описанным выше. В первую очередь отметим, что метрика Хэйворда (2.53) содержит два горизонта видимости не для любого выбора $M(v)$ и $L(v)$:

- Если $M(v) = \frac{3\sqrt{3}}{4}L(v)$, то метрика (2.53) описывает экстремальную чёрную дыру;

- Если $M(v) > \frac{3\sqrt{3}}{4}L(v)$, то чёрная дыра содержит два горизонта видимости — случай, который мы и будем рассматривать ниже;

- Если $M(v) < \frac{3\sqrt{3}}{4}L(v)$, то центральный объект с регулярным центром не содержит горизонтов, и внешний наблюдатель может получать информацию, исходящую из окрестности этого центра.

Чтобы исследовать эволюцию горизонтов, необходимо рассмотреть горизонт энергетических условий, который следует из условия:

$$\dot{M}r^3 - 4M^2L\dot{L} \geq 0. \quad (2.54)$$

Отсюда находим расположение горизонта энергетических условий:

$$r_{\text{нес}} = \left(\frac{4M^2L\dot{L}}{\dot{M}} \right)^{1/3}. \quad (2.55)$$

Заметим, что горизонт энергетических условий существует тогда и только тогда, когда параметр регуляризации является возрастающей функцией времени $\dot{L} > 0$. Для постоянного параметра регуляризации энергетические условия нарушаются только в том случае, когда масса чёрной дыры уменьшается. Именно такую модель предлагал Хэйворд. Однако в этом случае энергетические условия нарушаются во всём пространстве-времени, то есть $r_{\text{нес}} \rightarrow \infty$. Это означает, что внешний горизонт видимости является времени-подобной гиперповерхностью, а внутренний — пространственно-подобной. Эти два горизонта стремятся навстречу друг другу и в момент

времени $v = v_{\text{merge}}$, когда $M(v_{\text{merge}}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}L(v_{\text{merge}})$, они сливаются и исчезают, оставляя после себя объект с ненулевой массой и регулярным центром.

Теперь вернёмся к случаю, когда параметр регуляризации L не является константой, а зависит от времени. Заметим, что для возрастающей функции $L(v)$ существует область пространства-времени $0 \leq r < r_{\text{nec}}$, где энергетические условия нарушаются.

Рассмотрим аккрецию и рост массы чёрной дыры \dot{M} . Мы можем выбрать такие массовую функцию и параметр регуляризации, что в некоторый момент времени $v = v_0$ выполняется:

$$r_{\text{nec}}(v_0) < r_-(v_0) < r_+(v_0), \quad (2.56)$$

то есть внешний горизонт видимости — пространственно-подобная гиперповерхность, а внутренний — времени-подобная.

Однако, если r_{nec} изменяется быстрее, чем r_+ , то в некоторый момент времени $v = v_{\text{violate}}$ оба горизонта видимости окажутся внутри горизонта энергетических условий. Это означает, что несмотря на возрастающую массу чёрной дыры, существует момент времени v_{merge} , когда два горизонта видимости сливаются, а при $v > v_{\text{merge}}$ исчезают, оставляя область пространства-времени с регулярным центром, не прикрытой горизонтом. Таким образом, подобная модель может служить примером разрешения парадокса потери информации.

2.2.3 Чёрная дыра Вайдья в окружении космологических полей

Динамическое обобщение чёрной дыры Киселёва было предложено в работах [204–206]. В координатах Эддингтона–Финкельштейна это решение имеет вид:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M(v)}{r} + \frac{N(v)}{r^{3\omega+1}} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2, \quad (2.57)$$

где ω — параметр уравнения состояния, а $N(v)$ — параметр, связанный со структурой вещества, окружающего чёрную дыру.

Заметим, что для отрицательных значений ω пространство-время не является асимптотически плоским. Поэтому дальнейшие рассуждения касаются только случая $\omega > 0$.

Выполнение энергетических условий подразумевает выполнение следующего неравенства:

$$\dot{M} - \frac{\dot{N}}{2r^{3\omega}} \geq 0. \quad (2.58)$$

Отсюда мы легко можем найти расположение горизонта энергетических условий:

$$r_{\text{нec}} = \left(\frac{\dot{N}}{2\dot{M}} \right)^{\frac{1}{3\omega}}, \quad \omega > 0. \quad (2.59)$$

Отметим, что нарушение энергетических условий возможно только в том случае, когда \dot{N} и \dot{M} имеют одинаковые знаки, то есть $\dot{N}\dot{M} > 0$. В этом случае внешний горизонт видимости может быть как пространственно-подобной гиперповерхностью, так и времени-подобной или светоподобной.

Однако, если $\dot{N} < 0$, а $\dot{M} > 0$, то есть речь идёт о модели аккрецирующей чёрной дыры, то горизонт энергетических условий отсутствует, а результирующее пространство-время асимптотически стремится к чёрной дыре Вайдья.

2.3 Динамическое обобщение регулярной черной дыры с изменяющимся уравнением состояния

Мы уже рассматривали модель статичной черной дыры, источником которой выступает вещество Хагедорна. В этом параграфе мы придем к её динамическому обобщению исходя из общих соображений. Начнём мы с описания общего формализма, который нужен для получения решения, описывающего регулярную динамическую черную дыру.

Мы рассмотрим наиболее общий случай сферически-симметричной динамической черной дыры, которая описывается метрикой в координатах Эд-

дингтона–Финкельштейна $\{v, r, \theta, \varphi\}$:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M(v, r)}{r} \right) dv^2 + 2\varepsilon dvdr + r^2 d\Omega^2. \quad (2.60)$$

Плотность энергии и давление вещества задаются формулами:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{2M'}{r^2}, \\ P &= -\frac{M''}{r}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Эта система дифференциальных уравнений состоит из двух уравнений и трёх неизвестных функций $M(v, r)$, $\rho(v, r)$ и $P(v, r)$. Чтобы решить эту систему, необходимо ввести дополнительное уравнение, которое связывает плотность энергии и давление — уравнение состояния, которое мы запишем в виде баротропного уравнения состояния $P = K(v, r)\rho$, которое линейно связывает плотность энергии и давление. Для примера: $k = 1$ соответствует предельно-жесткому уравнению состояния, $k = \frac{1}{3}$ — излучению, $k = 0$ — пыли и $k = -1$ — космологической постоянной. Мы предполагаем, что в различные моменты гравитационного коллапса материя меняется, а следовательно, меняется и уравнение состояния, описывающее данную материю. Это означает, что параметр уравнения состояния K не должен быть постоянным. Вместо этого он должен быть функцией координаты r и времени v . В результате, мы приходим к следующему уравнению состояния:

$$P = K(v, r)\rho. \quad (2.62)$$

Закон сохранения тензора энергии-импульса $T_{;k}^{ik} = 0$ приводит к соотношению:

$$\rho' r = -2P - 2\rho. \quad (2.63)$$

Подставляя сюда уравнение состояния $P = K\rho$, мы приходим к дифференциальному уравнению вида:

$$\rho' r = -(2 + 2K)\rho. \quad (2.64)$$

Решая это дифференциальное уравнение, мы приходим к плотности энергии как к функции координаты r и времени v :

$$\rho = \frac{\rho_0}{r^2} e^{-\int \frac{2K}{r} dr}. \quad (2.65)$$

Здесь ρ_0 — положительная функция интегрирования. Плотность ρ (2.65) представляет собой функцию, зависящую от координаты r и времени v . Её явный вид зависит от формы функции коэффициента уравнения состояния $K(v, r)$. В общем случае мы ничего не знаем об этой функции, но поскольку нас интересует регулярный центр, то есть поведение этой функции в окрестности нуля, мы можем разложить $K(v, r)$ в ряд в окрестности $r = 0$:

$$K = \sum_{i=0}^n K_i r^i. \quad (2.66)$$

Здесь $K_i = K_i(v)$ — функции, зависящие от времени и имеющие вид:

$$K_i(v) \equiv \frac{1}{i!} \left. \frac{\partial^i K}{\partial r^i} \right|_{r=0}. \quad (2.67)$$

Подставляя это разложение в (2.65), мы получаем плотность энергии ρ в виде:

$$\rho = \frac{\rho_0}{r^{2+2K_0}} e^{-2 \sum_{i=1}^n K_i \frac{r^i}{i}}. \quad (2.68)$$

Как мы выяснили в предыдущей главе, регулярный центр может достигаться только в случае, если выполняется условие:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \rho(r, v) = \rho_1(v), \quad (2.69)$$

где $\rho_1(v)$ — плотность энергии в нуле. При этом $\rho_1(v)$ должна принимать конечные значения для всех значений v . В этом случае, мы получаем следующее ограничение на параметр $K_0(v)$:

$$K_0 \leq -1. \quad (2.70)$$

В случае, если $K_0(v) \equiv -1$, то плотность энергии в центре представляет собой плотность энергии вакуумной среды. С другой стороны, если $K_0 < -1$, то плотность энергии, а вместе с ней, как видно из уравнения состояния, исчезает и давление, что означает, что в центре отсутствует материя. Мы не будем рассматривать этот случай ниже и ограничимся условием, что $K_0(v) \equiv -1$. Из уравнения (2.65), мы можем получить массовую функцию в виде:

$$M(v, r) = \frac{\rho_0}{2} \int r^{-2K_0} e^{-2 \sum_{i=1}^n K_i \frac{r^i}{i}} dr + M_0(v). \quad (2.71)$$

Здесь $M_0(v)$ — ещё одна функция интегрирования, зависящая от времени, она соответствует динамической массе черной дыры.

Однако, несмотря на конечные плотность энергии и давление, массовая функция (2.71), в общем случае, не описывает регулярную черную дыру. Для того чтобы получить регулярный центр, необходимо удовлетворение условию $\lim_{r \rightarrow 0} M(v, r) = 0$, что приводит нас к ещё одному условию:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\rho_0}{2} \int r^{-2K_0} e^{-2\sum_{i=1}^n K_i \frac{r^i}{i}} dr = -M_0(v). \quad (2.72)$$

Для того чтобы найти явный вид решения, необходимо определить коэффициенты разложения $K_i(v)$. В первой модели, мы предположим, что:

$$\begin{aligned} K_0(v) &= -1, \\ K_1(v) &= K_1(v), \\ K_2(v) &= K_3(v) = 0. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Подставляя это определение в (2.71) и производя интегрирование, приходим к массовой функции в виде:

$$M(v, r) = -\frac{\rho_0(v)}{8K_1^3(v)} e^{-2K_1(v)r} (1 + 2rK_1(v) + 2r^2K_1^2(v)) + M_0(v), \quad (2.74)$$

где $K_1(v)$ — произвольная функция времени.

Заметим, что полученное решение (2.74) — это динамическое обобщение решения (1.98), которое, как мы выяснили в предыдущей главе, может также получаться, если источником черной дыры является вещество Хагедорна.

Для решения (2.74), мы отмечаем следующие свойства:

- Случай $M_0(v) \equiv \frac{\rho_0(v)}{8k_1^3(v)}$. В этом случае массовая функция равна нулю в центре:

$$\lim_{r \rightarrow 0} M(v, r) = 0, \quad (2.75)$$

а массовая функция (2.74) соответствует динамической регулярной черной дыре.

Скаляр Кречмана в нуле постоянен:

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \frac{512}{3} k_1^6(v) M_0^2(v). \quad (2.76)$$

Плотность энергии и давление принимают вид:

$$\begin{aligned}\rho &= 8M_0(v)k_1^3(v)e^{-2k_1(v)r}, \\ P &= 8M_0(v)k_1^3(v)e^{-2k_1(v)r}(-1 + k_1(v)r).\end{aligned}\quad (2.77)$$

Что касается энергетических условий, то очевидно, что сильное энергетическое условие, как и положено для регулярного центра, нарушается, а слабое и энерго-доминантное энергетические условия требуют выполнения следующих неравенств:

$$\rho_0(v) > 0, \quad (2.78)$$

$$r \leq \frac{2}{k_1(v)}. \quad (2.79)$$

Отсюда видно, что слабые энергетические условия выполняются во всем пространстве-времени, а энерго-доминантные условия нарушаются при определённом радиусе. Этот результат был ожидаем, поскольку мы предполагаем, что коэффициент $k(v, r)$ уравнения состояния зависит от радиуса. Тем не менее, решение (2.74) не может описывать всё пространство-время, так как оно предполагается справедливым только в процессе гравитационного коллапса и выполняется лишь в пределах коллапсирующего вещества, имеющего конечные границы. Следовательно, это решение должно быть сшито с другим решением, описывающим внешнюю геометрию коллапсирующей звезды. Мы вернёмся к обсуждению этого вопроса ниже.

Тем не менее, отметим, что на бесконечности это решение ведёт себя как метрика Шварцшильда, а в нуле имеет ядро де Ситтера.

Если мы выберем произвольные функции $k_1(v)$ и $\rho_0(v)$ в виде:

$$\begin{aligned}k_1(v) &= (\mu - v)^2, \\ \rho_0(v) &= 4\lambda k_1^3(v)v,\end{aligned}\quad (2.80)$$

то найдём поведение горизонтов видимости на плоскости $\{v, r\}$, изображённое на рисунке 2.1. Как видно из графика, черная дыра (2.74) имеет

два горизонта видимости, внешний из которых возрастает, а внутренний — убывает. Затем внутренний горизонт видимости начинает возрастать, а внешний — убывать, пока они не сливаются в точке, в которой $k(v_{\text{merge}}) = 0$.

Если мы рассмотрим эволюцию горизонта энергетических условий, как показано на рисунке 2.2, то увидим, что места минимума внутреннего горизонта видимости и максимума внешнего горизонта видимости соответствуют слиянию этих горизонтов с горизонтом энергетических условий, что находится в полном соответствии с выводами, изложенными в предыдущем параграфе.

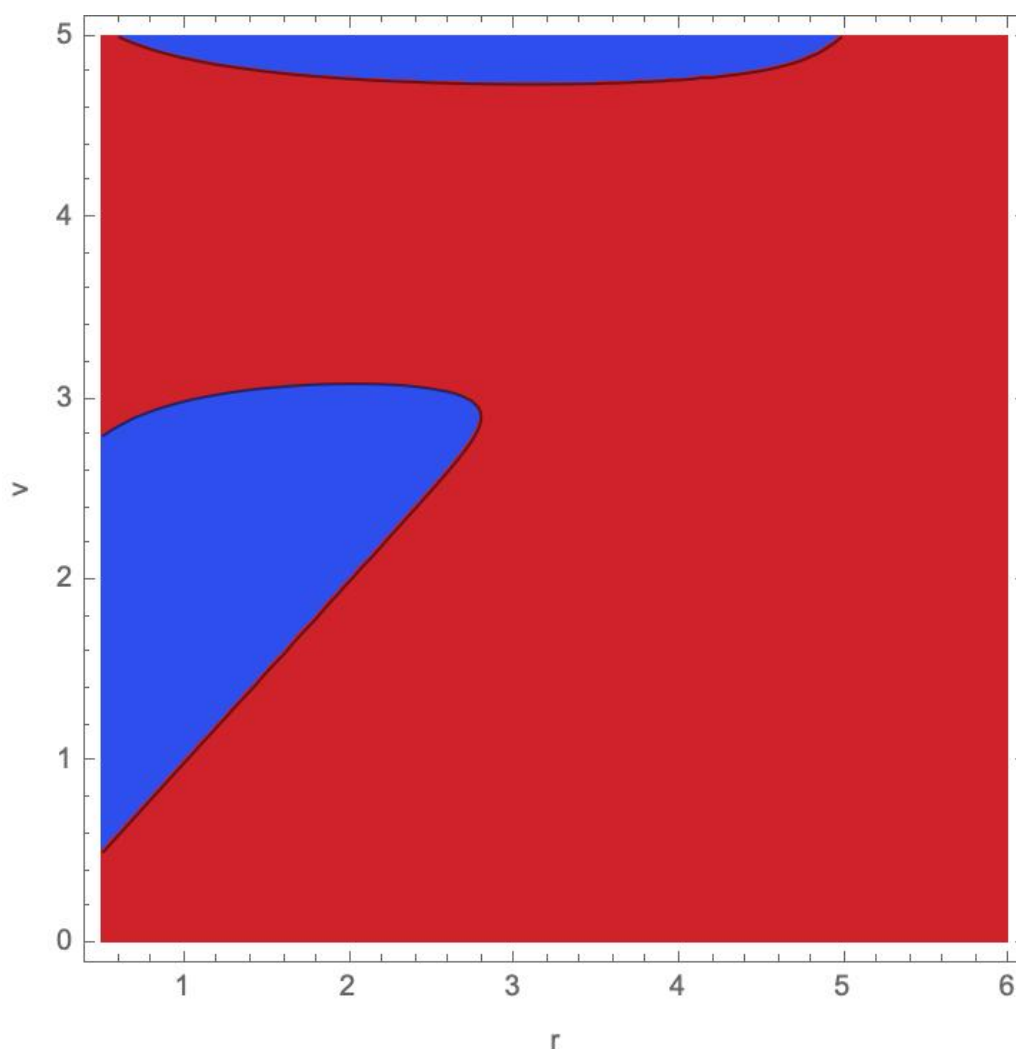


Рисунок 2.1: $F(v, r) = 0$ для $\mu = 4$, $\lambda = 1$.

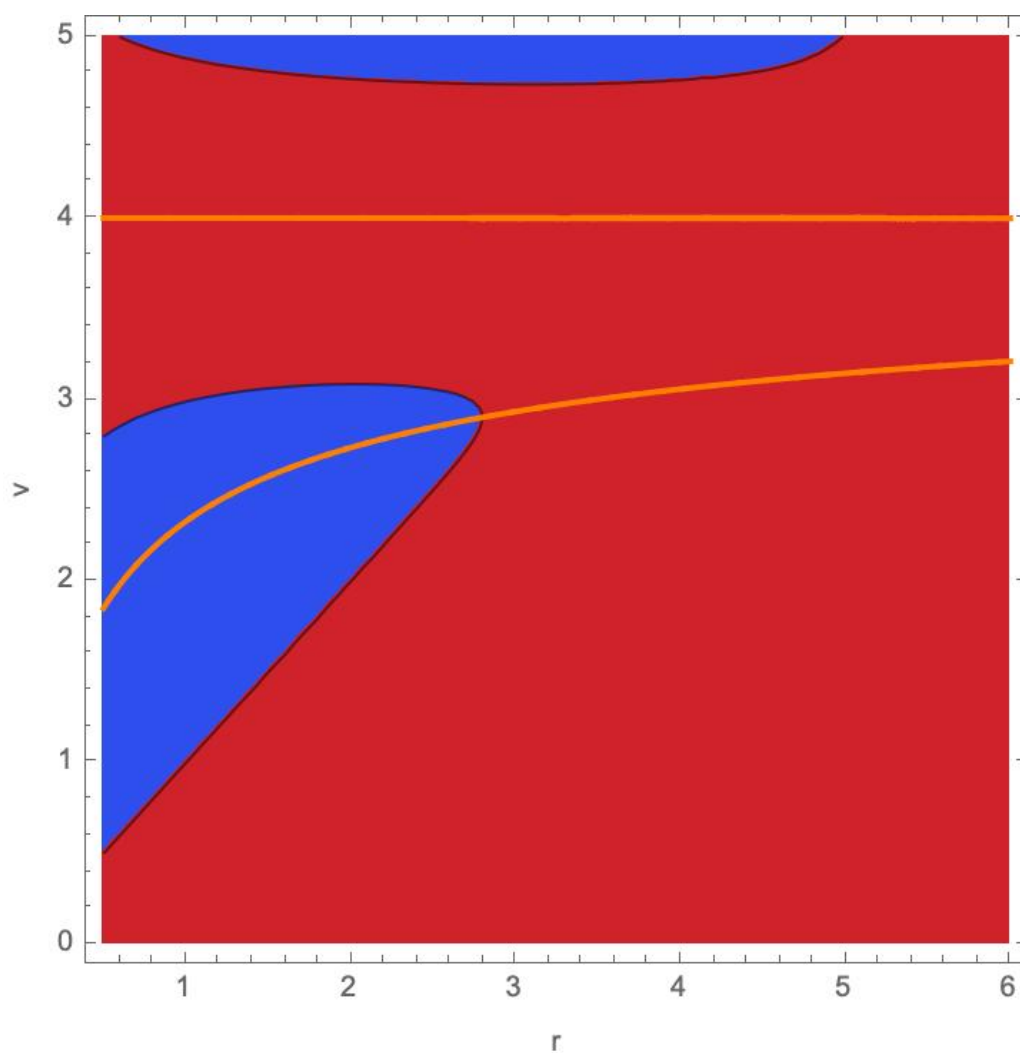


Рисунок 2.2: Тоже поведение горизонтов видимости как и на графике 2.1, но при учете горизонта энергетических условий $\dot{M} = 0$.

- Случай $M_0(v) \neq \frac{\rho_0(v)}{8k_1^3(v)}$. Этот случай соответствует сингулярной черной дыре, поскольку в этом случае мы не сможем удовлетворить условию:

$$\lim_{r \rightarrow 0} M(v, r) = 0. \quad (2.81)$$

- Мы можем ввести функцию:

$$N(v) \equiv M_0(v) - \frac{\rho_0(v)}{8k_1^3(v)}. \quad (2.82)$$

Эта функция может обращаться в ноль при некоторых значениях $v = v_* = v_1, v_2, v_3, \dots$. Это означает, что в этих точках массовая функция обращается в ноль:

$$\lim_{r \rightarrow 0} M(v_*, r) = 0, \quad (2.83)$$

что указывает на конечность скаляра Кречмана в центре, то есть на отсутствие сингулярности в эти моменты времени.

Это, в свою очередь, вызывает следующую проблему — проблему формирования и исчезновения сингулярности. Это может быть серьёзной проблемой, если сингулярность является гравитационно-сильной, то есть если любое тело, падающее на центр, разрушается, превращаясь в бесконечно тонкую и длинную струну. В таком случае в одни моменты времени тело разрушается, а в другие — нет, что, очевидно, противоречит физической непрерывности.

Однако, сингулярность оказывается гравитационно-слабой, что означает, что для падающего на центр тела нет разницы — есть ли в центре сингулярность или её нет. Эти два случая можно сравнить с жёсткой и мягкой смертью Вселенной. В первом случае (гравитационно-сильная сингулярность) приближение к сингулярности (в случае реколлапса модели Фридмана) будет сопровождаться постепенным разрушением всего сущего, тогда как во втором случае (гравитационно-слабая сингулярность) мы ничего не будем знать о конце, пока не столкнёмся с сингулярностью напрямую.

Как мы уже упоминали выше, решение (2.74) справедливо только вблизи центра. Поэтому необходимо сшить его с внешней метрикой пространства-времени. Наиболее естественным кандидатом является метрика Вайдья (2.1).

Однако, гладкая сшивка с метрикой Вайдья подразумевает, что плотность энергии (2.77) исчезает на некоторой гиперповерхности σ , по которой производится сшивка, чего, очевидно, не происходит. Следовательно, для гладкого сшивания двух решений необходимо предположить существование тонкого вещественного слоя, внутреннюю границу которого мы должны сшить с метрикой (2.74), а внешнюю — с метрикой Вайдья (2.1). Однако, подобное усложнение делает модель более искусственной, поэтому мы рассмотрим другую метрику, с которой будем гладко сшивать внутреннее решение (2.74).

Мы предположим, что коллапсирующее вещество во внешних слоях звезды имеет обычное баротропное уравнение состояния:

$$P = \alpha\rho, \quad (2.84)$$

где α — коэффициент уравнения состояния, принимающий значения в интервале $\alpha \in [-1, 1]$, $\alpha \neq \frac{1}{2}$. Решение, соответствующее такому уравнению состояния, носит название решения Хусейна, массовая функция которого имеет вид:

$$M(v, r) = M_1(v) + \rho_1 r^{1-2\alpha}. \quad (2.85)$$

Чтобы сшить в общем случае два решения по некоторой гиперповерхности σ , мы должны индуцировать на эту гиперповерхность метрики как со стороны внутреннего, так и внешнего решений. Затем необходимо сшить полученные метрики и внешние кривизны. Равенство внешних кривизн внутреннего и внешнего решений соответствует тому, что тензор Римана, отвечающий за кривизну пространства-времени, гладко меняется при пересечении гиперповерхности σ .

Однако, стоит отметить, что все величины кривизны зависят только от массовой функции и её первой и второй производных. Но из формул (2.61) видно, что первая производная соответствует плотности энергии вещества, а вторая — давлению. Поэтому, для гладкой сшивки по некоторой гиперповерхности σ нам необходимо, чтобы на этой гиперповерхности выполнялись следующие условия:

$$\begin{aligned} M_{\text{inner}}|_{\sigma} &= M_{\text{external}}|_{\sigma}, \\ \rho_{\text{inner}}|_{\sigma} &= \rho_{\text{external}}|_{\sigma}, \\ P_{\text{inner}}|_{\sigma} &= P_{\text{external}}|_{\sigma}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Мы хотим, чтобы на некоторой гиперповерхности σ решение (2.74) гладко сшивалось с решением (2.85). Стоит отметить, что расположение σ не является произвольным. Поэтому, для начала найдём $r = r_b$ — радиус гиперповерхности, по которой будет производиться сшивка.

В первую очередь, необходимо заметить, что решению (2.74) соответствует уравнение состояния:

$$P = (k_1 r - 1)\rho. \quad (2.87)$$

Мы хотим, чтобы это уравнение состояния на поверхности σ переходило в уравнение состояния:

$$P = \alpha\rho. \quad (2.88)$$

Исключая давление из этих двух уравнений, находим, что радиус гиперповерхности σ задаётся формулой:

$$r_b = \frac{\alpha + 1}{k_1}. \quad (2.89)$$

Заметим, что этот радиус напрямую зависит от свойств баротропного вещества и вещества, формирующего ядро де Ситтера. Это означает, что для пыли ($\alpha = 0$) или для излучения ($\alpha = \frac{1}{3}$) радиусы σ будут различаться. Этот факт указывает на то, что поверхность σ на физическом языке означает фазовый переход вещества.

Важно также отметить, что для гладкой сшивки нам остаётся сшить только плотность энергии и массовую функцию, так как давление будет гладко переходить через гиперповерхность σ вследствие уравнения состояния.

Плотность энергии, соответствующая решению Хусейна, задаётся формулой:

$$\rho = 2(1 - 2\alpha)\frac{\rho_1(v)}{r^{2\alpha+2}}. \quad (2.90)$$

Эта плотность переходит в плотность (2.77) решения (2.74) на гиперповерхности σ , расположенной при $r = r_b$ (2.89), если функция $\rho_1(v)$ удовлетворяет следующему условию:

$$\rho_1(v) = \frac{4M_0 k_1^3}{1 - 2\alpha} r_b^{2\alpha+2} e^{-2(\alpha+1)v}. \quad (2.91)$$

Массовая функция (2.74) переходит в решение Хусейна (2.85) на гиперповерхности σ при $r = r_b$ (2.89) с функцией $\rho_1(v)$ вида (2.91), если функция $M_0(v)$ удовлетворяет следующему условию:

$$M_1 = M_0 \left(1 - \frac{9 + 6\alpha + 5\alpha^2 + 2\alpha^3}{1 - 2\alpha} e^{-2(\alpha+1)} \right). \quad (2.92)$$

Таким образом, можно предложить следующий процесс, приводящий к образованию регулярной черной дыры (2.74):

- Рассмотрим шар вещества, описываемого баротропным уравнением состояния $P = \alpha\rho$. Под действием сил гравитации этот шар подвергается непрерывному гравитационному коллапсу. При этом плотность и давление вещества возрастают пропорционально друг другу.

- Когда плотность достигает критических значений на расстоянии $r = r_b$ (2.89) от центра, происходит фазовый переход вещества, и оно описывается уравнением состояния $P = (k_1(v)r - 1)\rho$. Дальнейшее сжатие вещества приводит к формированию ядра де Ситтера, а результатом гравитационного коллапса становится регулярная черная дыра со внешней геометрией Хусейна и внутренней геометрией (2.74).

Таким образом, мы описали процесс гравитационного коллапса баротропного вещества, которое подвергается фазовому переходу на некотором расстоянии $r = r_b$ (2.89), зависящем от свойств как баротропного вещества, так и вещества в центре. При этом должны выполняться условия (2.91) и (2.92). При таких предположениях результирующая черная дыра, являющаяся результатом гравитационного коллапса, является регулярной.

2.4 Динамическое обобщение регулярной черной дыры Дымниковой

Следующую модель регулярной чёрной дыры, которую мы рассмотрим, соответствует следующему выбору параметров разложения коэффициента

уравнения состояния:

$$\begin{aligned} k_0(v) &= -1, \\ k_3(v) &= k_3(v), \\ k_1(v) &= k_2(v) = 0. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Подставляя эти предположения в массовую функцию (2.71), получаем после интегрирования:

$$M(v, r) = M_0(v) - \frac{3\rho_0(v)}{2k_3(v)} e^{-\frac{1}{9}k_3(v)r^3}. \quad (2.94)$$

Как и в случае первой модели, рассмотрим следующие свойства решения (2.94):

- Случай $M_0(v) \equiv \frac{3\rho_0(v)}{2k_3(v)}$. Этот случай приводит к тому, что метрика с массовой функцией (2.94) описывает регулярную чёрную дыру, являющуюся динамическим обобщением известного решения Дымниковой (1.84).

Скаляр Кречмана в нуле имеет вид:

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \frac{32}{27} M_0(v)^2 k_3(v)^2. \quad (2.95)$$

Это означает, что пространство-время в центре остаётся регулярным — кривизна конечна, что согласуется с требованиями отсутствия геометрической сингулярности.

Физические величины — плотность энергии и давление — для этого решения имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{2}{3} M_0(v) k_3(v) e^{-\frac{1}{9}k_3(v)r^3}, \\ P &= \frac{2}{3} M_0(v) k_3(v) e^{-\frac{1}{9}k_3(v)r^3} \left(\frac{k_3(v)r^3}{6} - 1 \right). \end{aligned} \quad (2.96)$$

Решение (2.94) удовлетворяет слабому энергетическому условию во всём пространстве-времени. Однако доминантные энергетические условия выполняются только в пределах коллапсирующего вещества. Явно эти условия записываются как:

$$\rho_0(v) > 0, \quad (2.97)$$

$$r \leq \left(\frac{12}{k_3(v)} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (2.98)$$

Решение (2.94) асимптотически на бесконечности ведёт себя как метрика Шварцшильда (1.1), а в центре обладает ядром де Ситтера.

Точно так же, как и в предыдущей модели, мы можем выбрать произвольные функции в виде:

$$\begin{aligned} k_3(v) &= (\mu - v)^2, \\ \rho_0(v) &= \frac{2}{3}\lambda k_3(v)v, \end{aligned} \quad (2.99)$$

и воспроизвести поведение горизонтов видимости на плоскости $\{v, r\}$.

Точно так же, как и в случае первой модели, подобный выбор произвольных функций приводит к нарушению светоподобных энергетических условий, что влечёт за собой появление горизонта энергетических условий.

Пока горизонт энергетических условий находится под внутренним горизонтом видимости, поведение горизонтов видимости является «нормальным» в том смысле, что внешний горизонт видимости является пространственно-подобной гиперповерхностью и расширяется, а внутренний горизонт видимости — времени-подобной гиперповерхностью и сжимается.

На графиках 2.3 и 2.4 показано поведение горизонтов видимости вместе с поведением горизонта энергетических условий. Видно, что когда горизонт энергетических условий сливается с внутренним горизонтом видимости, тот начинает возрастать, то есть в точке слияния внутренний горизонт достигает минимума. Аналогично, внешний горизонт видимости в этой точке достигает максимума. Это вновь находится в полном соответствии с выводами, полученными выше.

- Случай $M_0(v) \neq \frac{3\rho_0(v)}{2k_3(v)}$. Этот случай приводит к тому, что не выполняется условие $\lim_{r \rightarrow 0} M(v, r) = 0$, что, в свою очередь, означает, что скаляр Кречмана расходится в центре. Это указывает на сингулярный характер решения в окрестности $r = 0$.

- Как и для предыдущего случая, можно ввести функцию:

$$N(v) = M_0(v) - \frac{2\rho_0(v)}{3k_3(v)}, \quad (2.100)$$

нули которой определяют моменты времени $v = v_*$, при которых выполняется условие $\lim_{r \rightarrow 0} M(v_*, r) = 0$.

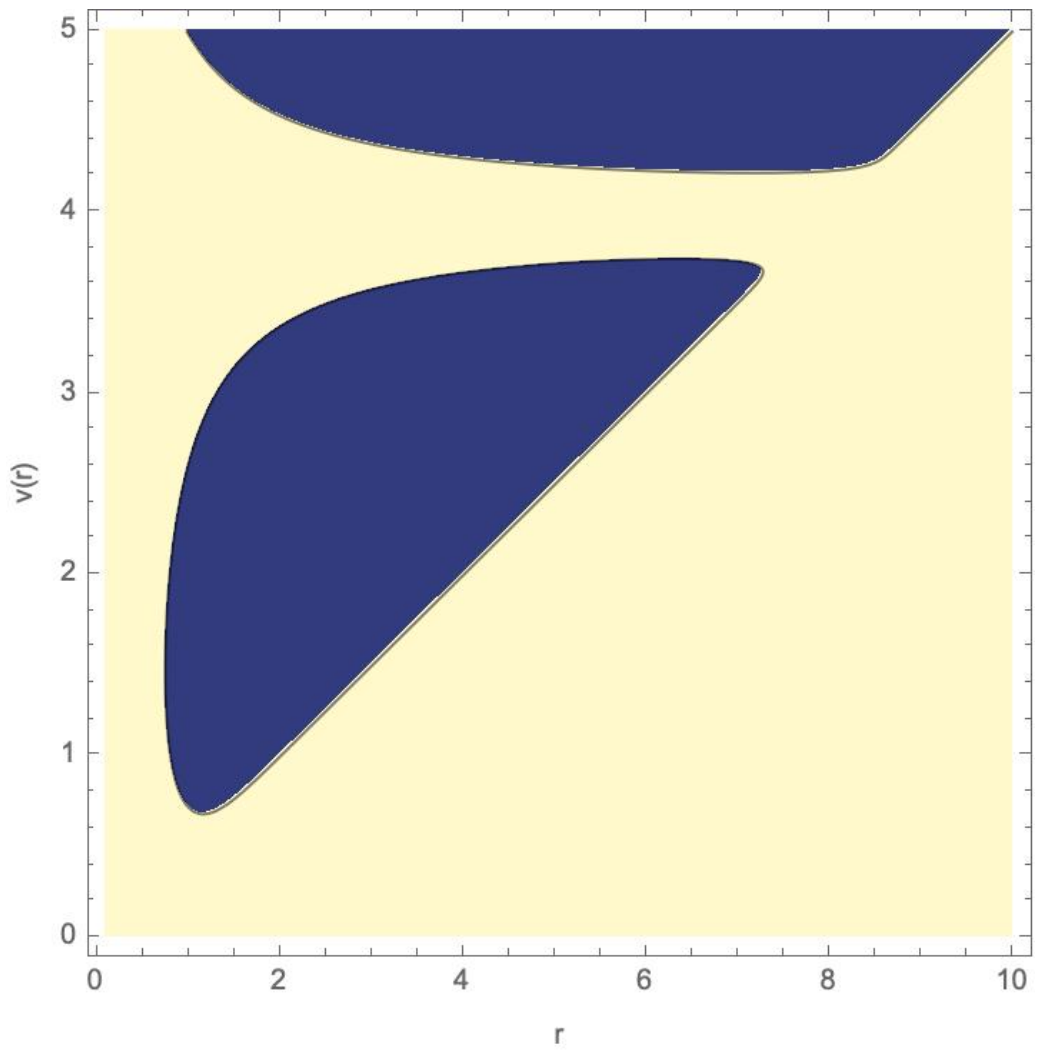


Рисунок 2.3: Поведение горизонтов видимости $F(v, r) = 0$ и $\mu = 4$, $\lambda = 1$.

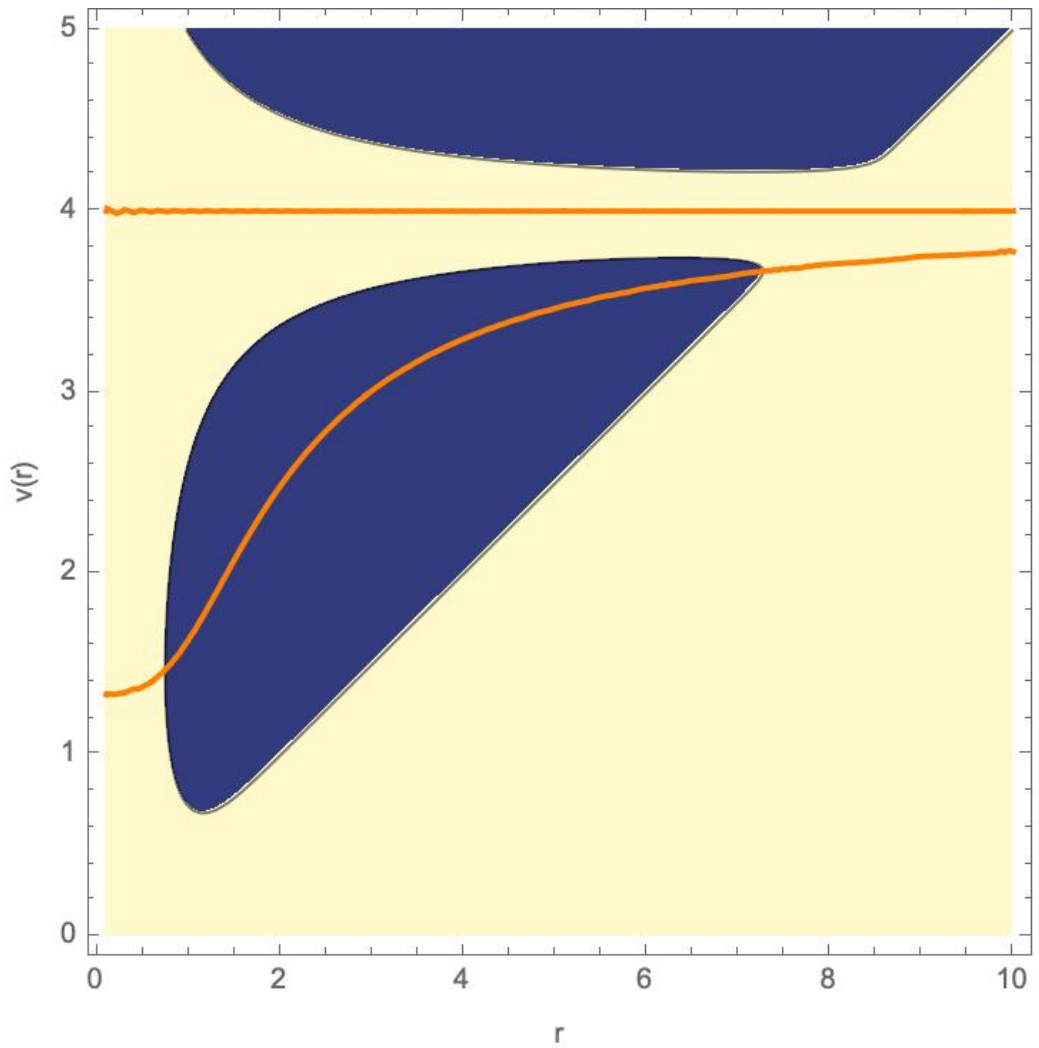


Рисунок 2.4: То же поведение горизонтов видимости как и на графике 2.3, но с условием $\dot{M} = \frac{dM}{dv} = 0$, отражающий поведение горизонта энергетических условий (Оранжевая линия).

Поскольку для решения (2.94) плотность энергии и давление имеют конечные значения в центре, то в точке $v = v_*$, когда массовая функция обращается в ноль, скаляр Кречмана остаётся конечным — это указывает на регулярное поведение пространства-времени в центре. Как и в предыдущей модели, такое поведение обусловлено тем фактом, что сингулярность, возникающая при $\lim_{r \rightarrow 0} M(v, r) \neq 0$, является гравитационно-слабой.

Отметим следующий факт: если функция $k_3(v)$ не убывает, т.е. $\dot{k}_3 \geq 0$, то светоподобные энергетические условия выполняются во всём пространстве-времени. Это означает, что внешний горизонт видимости расширяется, а внутренний — сжимается. Однако ситуация резко меняется, если предположить, что функция $k_3(v)$ является убывающей, т.е. $\dot{k}_3 < 0$. В этом случае энергетические условия могут нарушаться.

Когда горизонт энергетических условий пересекает один из горизонтов видимости, их динамика изменяется на диаметрально противоположную: расширение сменяется сжатием и наоборот. Более того, при $\dot{k}_3 < 0$ горизонт энергетических условий стремится к бесконечности в тот момент, когда $k_3(v) \rightarrow 0$. Как только $k_3(v) = 0$, горизонт энергетических условий сливается с внешним горизонтом видимости, а в последующие времена исчезает.

Тем не менее, как мы продемонстрировали выше, эти горизонты могут появляться вновь — но уже с расширяющимся внешним горизонтом видимости и сжимающимся внутренним. При этом светоподобные энергетические условия вновь выполняются во всём пространстве-времени.

В качестве примера рассмотрим массовую функцию вида:

$$M(v, r) = M_0(v) - M_0(v)e^{-r^3 \sin^2 v}. \quad (2.101)$$

Поведение горизонтов чёрной дыры, описываемой этой массовой функцией, изображено на графиках 2.5 и 2.6. Видно, что динамика горизонтов носит периодический характер. Это означает, что чёрная дыра формируется, эволюционирует, затем начинает испаряться; после полного исчезновения горизонтов существует короткий интервал времени, в течение которого наблюдатель может получать информацию из центральной области. Затем горизонты вновь появляются, и цикл повторяется.

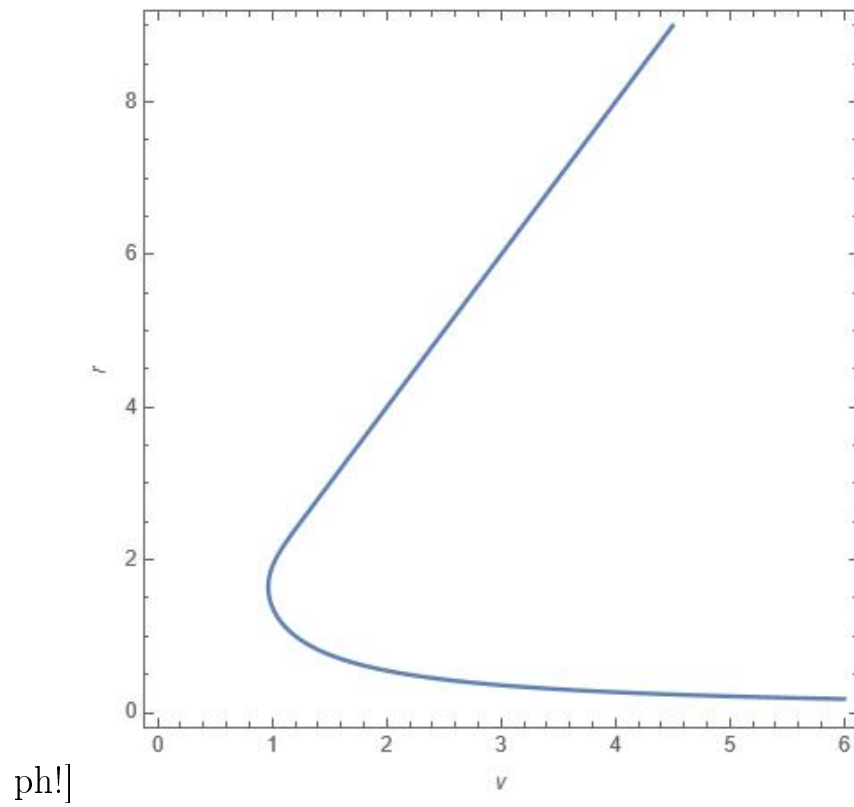


Рисунок 2.5: Эволюция горизонтов видимости с линейной функцией $k_3(v)$.

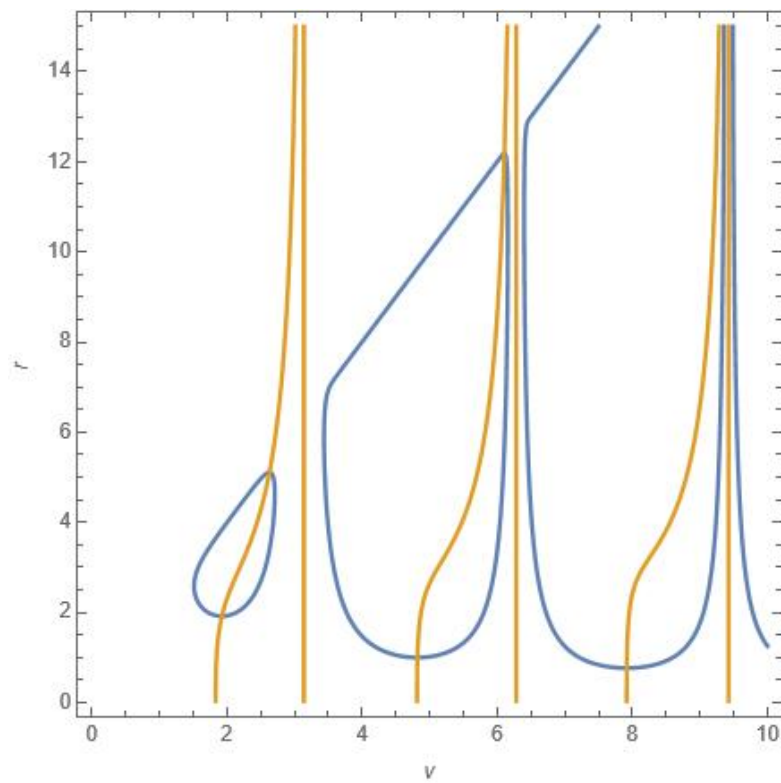


Рисунок 2.6: Эволюция горизонтов видимости с периодическим поведением функции $k_3(v)$.

На графиках изображено периодическое поведение горизонтов. Этот бесконечный ряд чёрных дыр, которые изначально увеличиваются, затем сжимаются, испаряются и вновь образуются, выглядит абсурдно. Причина такого поведения — в том, что функция $k_3(v)$ обращается в ноль бесконечное количество раз. Однако подобное абсурдное поведение легко исключить.

Дело в том, что вертикальная линия на графиках демонстрирует скачок второго рода: как только горизонт энергетических условий стремится к бесконечности, возникает ситуация, при которой светоподобные энергетические условия нарушаются во всём пространстве-времени. Затем следует резкий переход (вертикальная линия), после которого эти условия восстанавливаются и снова выполняются повсеместно.

В связи с этим, несмотря на удивительную динамику горизонтов видимости, необходимо рассматривать такие модели только до первого обращения функции $k_3(v)$ в ноль. Физически невозможно обосновать бесконечно повторяющийся цикл образования и испарения чёрных дыр, а также резкое восстановление энергетических условий во всём пространстве-времени.

Поэтому мы накладываем условие: с момента образования чёрной дыры в момент времени $v = v_{\text{formation}}$ гравитационный коллапс может длиться только до момента $v = v_{\text{end}}$, при котором достигается первый ноль функции $k_3(v_{\text{end}}) = 0$. Таким образом, коллапс возможен лишь в интервале времени:

$$v_{\text{formation}} \leq v \leq v_{\text{end}}. \quad (2.102)$$

Займёмся теперь вопросом сшивки двух решений: внутреннего регулярного решения (2.94) и внешнего решения Хусейна (2.85). Важно отметить, что поскольку плотность энергии регулярного решения не обращается в ноль при конечных значениях r , метрика Вайдья в качестве внешнего решения может быть использована только при введении дополнительного вещественного слоя. Вместо этого выберем в качестве внешнего решения модель Хусейна, источником которой является баротропное вещество.

Из вида плотности энергии и давления (2.96) для регулярного решения (2.94) можно вывести следующее уравнение состояния:

$$P = \rho \left(\frac{M_0 k_3}{6} - 1 \right). \quad (2.103)$$

Это уравнение состояния переходит в баротропное уравнение $P = \alpha\rho$ на гиперповерхности σ , расположенной при $r = r_b$, где:

$$r_b^3 = \frac{6(\alpha + 1)}{k_3}. \quad (2.104)$$

Как и в предыдущем случае, сначала найдём условия, при которых плотность энергии решения Хусейна:

$$\rho_{\text{Husain}} = 2(1 - 2\alpha) \frac{\rho_1(v)}{r^{2\alpha+2}}, \quad (2.105)$$

совпадает с плотностью энергии (2.96) регулярного решения (2.94). Эти две плотности совпадают на гиперповерхности σ при $r = r_b$ (2.104), если функция $\rho_1(v)$ удовлетворяет условию:

$$\rho_1(v) = \frac{M_0(v)}{3(1 - 2\alpha)} r_b^{2\alpha+2} e^{-\frac{2(\alpha+1)}{3}v}. \quad (2.106)$$

Аналогичным образом находим, что массовая функция решения Хусейна (2.85) переходит в массовую функцию регулярного решения (2.94) на гиперповерхности σ при $r = r_b$ (2.104), при выполнении условия (2.106), если произвольная функция $M_1(v)$ удовлетворяет соотношению:

$$M_1(v)|_{r=r_b} = M_0(v) \left(1 - \frac{3}{1 - 2\alpha} e^{-\frac{2(\alpha+1)}{3}v} \right). \quad (2.107)$$

Таким образом, условия (2.104), (2.106) и (2.107) обеспечивают гладкую сшивку регулярного решения (2.94) и решения Хусейна (2.85) на гиперповерхности σ .

Мы можем предложить аналогичную модель гравитационного коллапса, как это было сделано для предыдущей модели:

- Рассмотрим шар вещества, заполненный баротропным веществом с уравнением состояния $P = \alpha\rho$. Для более реалистичной модели параметр α должен находиться в диапазоне $[0, 1]$. Под действием сил гравитации шар подвергается непрерывному гравитационному коллапсу.

- Когда достигаются экстремальные плотности, становится возможен фазовый переход вещества с образованием регулярного центра, описываемого метрикой (2.94), при условии выполнения согласования на гиперповерхности σ : (2.104), (2.106) и (2.107).

Важно отметить, что гиперповерхность σ выбирается не произвольно, а имеет чётко определённое положение, зависящее от структуры баротропного вещества и свойств вещества, формирующего регулярный центр. Эта определённость означает, что фазовый переход происходит не во всём объёме коллапсирующего шара, а его расположение определяется конкретными значениями плотности энергии и давления.

Заметим при этом, что чем больше давление баротропного вещества (т.е. чем больше α), тем дальше от центра находится гиперповерхность σ . Минимальное значение r_b для обычной материи ($\alpha \geq 0$) достигается в случае пылевидного коллапса ($\alpha = 0$).

Как видно из уравнения (2.104), расположение гиперповерхности зависит от времени. При выполнении светоподобных энергетических условий ($\dot{k}_3 > 0$) эта гиперповерхность сжимается, а при их нарушении — расширяется. Однако с течением времени плотность энергии в баротропном решении Хусейна возрастает, а значит, фазовый переход должен происходить всё дальше от центра.

Важно подчеркнуть, что такое поведение гиперповерхности σ не зависит от выбора внешнего решения и обусловлено исключительно свойствами решений (2.74) и (2.94). То есть, независимо от того, какое внешнее решение мы используем, необходимо допустить нарушение светоподобных энергетических условий во внутренних областях для того, чтобы фазовый переход происходил при заданных значениях давления и плотности. Отметим также, что подобное нарушение ограничено внутренней областью и не затрагивает внешние слои коллапсирующего вещества, описываемые баротропным уравнением состояния $P = \alpha\rho$.

2.5 Регулярная черная дыра с модифицированным уравнением состояния газа Чаплыгина

Анализ сверхновых типа Ia показал, что наша Вселенная не просто расширяется, но делает это с ускорением [211]. Согласно уравнениям Фридмана, ускоренное расширение Вселенной возможно в том случае, если коэффициент

баротропного уравнения состояния $P = \alpha\rho$ удовлетворяет условию $\alpha < -\frac{1}{3}$. Таинственную субстанцию, ответственную за ускоренное расширение Вселенной, назвали темной энергией.

В настоящее время известно множество моделей темной энергии. В рамках общей теории относительности наиболее популярной является модель Λ CDM [212], в которой космологическая постоянная играет роль темной энергии. Согласно этой модели, при расширении Вселенной на больших расстояниях отрицательное давление, связанное с космологической постоянной, начинает доминировать над гравитационным притяжением, что приводит к ускоренному расширению.

Однако модель Λ CDM обладает рядом недостатков, таких как проблема космологической постоянной и проблема плоскостности. По этой причине были предложены альтернативные модели темной энергии. Если рассматривать баротропное уравнение состояния, то случай $\alpha = -1$ соответствует космологической постоянной. Другой пример — модель квинтэссенции [213], в которой параметр уравнения состояния лежит в интервале $-1 < \alpha < -\frac{1}{3}$.

Кроме того, в космологии и астрофизике компактных звёзд с тёмной энергией существует так называемая фантомная модель темной энергии [214], для которой $\alpha < -1$. Такое уравнение состояния нарушает светоподобное энергетическое условие (условие энергодоминантности), что может приводить к появлению гравитационно-сильных сингулярностей в будущем (т.н. «Большой разрыв»). Тем не менее, несмотря на существование этих моделей, природа тёмной энергии по-прежнему остаётся одной из величайших загадок современной физики.

В связи с этим, всё большую популярность приобретают модели, в которых тёмная энергия и тёмная материя являются различными проявлениями одной и той же субстанции [215]. Наиболее простой моделью, описывающей объединённую тёмную материю и тёмную энергию, является газ Чаплыгина [216].

На поздних этапах эволюции Вселенная, заполненная газом Чаплыгина, ведёт себя как космологическая постоянная ($P = -\rho$), а на ранних этапах — как бесстолкновительная материя ($P = 0$), что соответствует уравнению со-

стояния тёмной материи. Влияние газа Чаплыгина на релятивистскую структуру компактных звёзд интенсивно изучается в последние годы [217–227].

Уравнение состояния газа Чаплыгина задаётся формулой:

$$P = -\frac{b}{\rho}, \quad (2.108)$$

где $b > 0$ — положительная константа. Существует также обобщённая модель — обобщённый газ Чаплыгина, имеющий вид:

$$P = a\rho - \frac{b}{\rho^\gamma}, \quad (2.109)$$

где a — вещественная константа, а $\gamma = 1 + \frac{1}{n}$, где n — политропный индекс.

Заметим, что при больших плотностях, т.е. в центре звезды, газ Чаплыгина ведёт себя как баротропное уравнение состояния $P = a\rho$. Однако при рассмотрении гравитационного коллапса такие уравнения состояния с постоянным b явно неприемлемы, поскольку при $b > 0$ нарушается условие энергодоминантности. Более того, несложно показать, что подобные уравнения состояния с постоянным b не приводят к образованию регулярной чёрной дыры.

Как следствие, параметр b должен зависеть от времени и радиальной координаты:

$$b \equiv b(v, r). \quad (2.110)$$

Чтобы решить уравнения Эйнштейна, воспользуемся уравнением непрерывности (сохранения энергии-импульса):

$$\rho' r + 2P + 2\rho = 0. \quad (2.111)$$

Подставляя в него уравнение состояния в виде модифицированного газа Чаплыгина:

$$P = a\rho + \frac{b(v, r)}{r^\gamma}, \quad (2.112)$$

приходим к уравнению:

$$\rho' r + 2(a + 1)\rho + \frac{2b(v, r)}{r^\gamma} = 0. \quad (2.113)$$

Общим решением этого уравнения является выражение для плотности энергии в виде:

$$\rho = r^{-(2a+2)} \left[-(\gamma + 1) \int 2b(v, r) r^{(2a+2)(1-\gamma)-1} dr + \rho_0(v) \right]^{\frac{1}{\gamma+1}}, \quad (2.114)$$

где $\rho_0(v)$ — функция интегрирования, зависящая от времени.

Воспользовавшись уравнением Эйнштейна для сферически-симметричной метрики:

$$\rho = \frac{2M'}{r^2}, \quad (2.115)$$

мы можем формально записать массовую функцию в виде:

$$M(v, r) = M_0(v) + \frac{1}{2} \int \rho r^2 dr, \quad (2.116)$$

где $M_0(v)$ — функция интегрирования, интерпретируемая как динамическая масса чёрной дыры.

Решение (2.116) описывает регулярную чёрную дыру, если выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} b(v, r) &= b_0(v), \\ \lim_{r \rightarrow 0} \rho(v, r) &= c_1 = \text{const.}, \\ \lim_{r \rightarrow 0} M(v, r) &= 0 \rightarrow M_0(v) = -\frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0} \int \rho r^2 dr. \end{aligned} \quad (2.117)$$

Из этих соотношений мы видим, что плотность энергии конечна в центре только при $a = -1$. Значения $a < -1$ приводят к нулевой плотности энергии и давлению, и мы не будем рассматривать этот случай, поскольку он соответствует отсутствию вещества в центре.

В качестве явного примера рассмотрим функцию $b(v, r) = b(v)r^3$. Подставляя её в уравнение (2.114), находим плотность энергии в виде:

$$\rho(v, r) = \left[\rho_0(v) - (\gamma + 1) \frac{2b(v)r^3}{3} \right]^{\frac{1}{1+\gamma}}. \quad (2.118)$$

Чтобы удовлетворить слабым энергетическим условиям, необходимо потребовать выполнение следующего условия:

$$\rho_0(v) = (\gamma + 1) \frac{2b(v)R^3}{3}, \quad (2.119)$$

где R — радиус звезды. В этом случае слабые энергетические условия выполняются внутри коллапсирующего вещества, т.е. при $r \leq R$.

Подставляя плотность энергии (2.118) в массовую функцию (2.116), после интегрирования получаем:

$$\begin{aligned} M(v, r) &= M_0(v) - C(v) [R^3 - r^3]^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}}, \\ C(v) &\equiv \frac{1}{6(\gamma+2)} (\gamma+1)^{\frac{\gamma+2}{\gamma+1}} \left(\frac{2b(v)}{3} \right)^{\frac{1}{\gamma+1}}. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Важно отметить, что в общем случае решение (2.120) не описывает регулярную чёрную дыру. Как и в предыдущих моделях, отметим следующие свойства:

- Если

$$C(v) \equiv \frac{M_0(v)}{R^{\frac{3\gamma+6}{\gamma+1}}}, \quad (2.121)$$

то решение (2.120) описывает регулярную чёрную дыру: $\lim_{r \rightarrow 0} M(v, r) = 0$, скаляр Кречмана конечен, а геометрия остаётся регулярной в центре.

- Если $C(v) \neq \frac{M_0(v)}{R^{\frac{3\gamma+6}{\gamma+1}}}$, то $\lim_{r \rightarrow 0} M(v, r) \neq 0$, и скаляр Кречмана расходится, что указывает на сингулярное поведение в центре.

- Мы можем ввести функцию

$$N(v) \equiv C(v) - \frac{M_0(v)}{R^{\frac{3\gamma+6}{\gamma+1}}}, \quad (2.122)$$

нули которой определяют моменты времени $v = v_*$, при которых $\lim_{r \rightarrow 0} M(v_*, r) = 0$. В эти моменты пространство-время в центре является регулярным, несмотря на наличие сингулярности в другие временные интервалы.

Отметим также, что метрика (2.120) при $r = R$ напоминает метрику Вайдья, поскольку массовая функция становится постоянной по r , а плотность энергии обращается в ноль. Однако из вида уравнения состояния следует, что как только $\rho \rightarrow 0$, давление $P = a\rho - \frac{b(v,r)}{\rho^\gamma}$ стремится к минус бесконечности (при $a = -1$, $b > 0$), что указывает на сингулярное поведение давления на гиперповерхности $r = R$.

Из вышесказанного следует, что сшивка решения (2.120) с метрикой Вайдья невозможна без появления физических сингулярностей на границе. Сле-

довательно, как и в предыдущих случаях, мы будем сшивать внутреннее решение (2.120) с внешним решением Хусейна (2.85).

Также важно подчеркнуть, что мы не можем использовать метрику (2.120) для расчёта тени чёрной дыры, квазинормальных мод, термодинамических свойств или других физически наблюдаемых величин при произвольных r , поскольку при достаточно больших значениях радиальной координаты нарушаются все основные энергетические условия. Поэтому необходима гладкая сшивка с внешней метрикой, описывающей физически допустимое поведение на больших расстояниях.

Условие того, что модифицированный газ Чаплыгина на гиперповерхности σ должен переходить в баротропное вещество с уравнением состояния $P = \alpha\rho$, приводит к следующему соотношению:

$$\begin{aligned}\alpha\rho &= -\rho + \frac{3\xi^2 r^3}{2(\gamma+1)\rho^\gamma}, \\ \xi &\equiv 6C(v)\frac{\gamma+2}{\gamma+1}.\end{aligned}\quad (2.123)$$

Плотность энергии решения (2.120), записанная через функцию $C(v)$ и параметр ξ , принимает вид:

$$\rho = \xi (R^3 - r^3)^{\frac{1}{\gamma+1}}. \quad (2.124)$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.123), находим расположение гиперповерхности σ , на которой происходит переход к баротропному режиму:

$$r_b^3 = \frac{(\alpha+1)R^3}{\alpha+1 + \frac{3\xi}{2(\gamma+1)}}. \quad (2.125)$$

2.6 Метод регуляризации

В предыдущих параграфах мы рассмотрели несколько моделей гравитационного коллапса, приводящих к регулярному центру. Для каждой модели мы указывали необходимость сшивки метрики, описывающей регулярный центр, с метрикой Хусейна, соответствующей баротропному уравнению состояния. Метрика Хусейна имеет вид:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M_0(v)}{r} + \frac{\rho_0(v)}{r^{2\alpha}} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2. \quad (2.126)$$

Здесь α — параметр уравнения состояния. Отметим, что решение Хусейна (2.126) описывает только сингулярную чёрную дыру.

Мы хотим построить расширение метрики Хусейна таким образом, чтобы при больших расстояниях мы восстанавливали исходное решение (2.126) и баротропное уравнение состояния $P = \alpha\rho$, а в центре при этом формировались регулярные условия — в частности, ядро де Ситтера. Напомним, что образование ядра де Ситтера означает конечность плотности энергии и давления в центре чёрной дыры, а также обращение массовой функции в ноль: $\lim_{r \rightarrow 0} M(v, r) = 0$.

Мы предлагаем следующий метод регуляризации метрики Хусейна. Введём функцию $\beta \equiv \beta(v)$, удовлетворяющую условию $\frac{\beta(v)}{r} \ll 1$ для всех v , и представим плотность энергии Хусейна в виде:

$$\rho(v, r) \rightarrow \rho(v, r + \beta) = \frac{2(1 - 2\alpha)\rho_0(v)}{(r + \beta)^{2\alpha+2}}. \quad (2.127)$$

Решая затем уравнение Эйнштейна:

$$\rho = \frac{2M'}{r^2}, \quad (2.128)$$

приходим к дифференциальному уравнению:

$$\frac{2M'}{r^2} = \frac{2(1 - 2\alpha)D(v)}{(r + \beta)^{2\alpha+2}}, \quad (2.129)$$

где для краткости обозначено $D(v) \equiv \rho_0(v)$. Чтобы решить это уравнение, необходимо рассмотреть три отдельных случая:

1. $\alpha = 0$ — случай пыли;
2. $\alpha = -\frac{1}{2}$;
3. Общий случай, когда $\alpha \in [-1, 1]$, $\alpha \neq 0, \pm\frac{1}{2}$.

2.6.1 Случай пыли

Начнём рассмотрение решения уравнения (2.129) со случая пыли, $\alpha = 0$. В этом случае интегрирование даёт:

$$M(v, r) = M_0(v) + D(v)(r + \beta(v)) - 2\beta(v)D(v) \ln |r + \beta(v)| - \frac{\beta^2(v)D(v)}{r + \beta(v)}. \quad (2.130)$$

Заметим, что при $\beta(v) \equiv 0$ это решение переходит в классическое решение Хусейна для пыли:

$$M(v, r) = M_0(v) + D(v)r, \quad \beta(v) \equiv 0. \quad (2.131)$$

Плотность энергии и давление для случая (2.130) имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{2D(v)}{(r + \beta(v))^2}, \\ P &= -\frac{2D(v)\beta(v)}{(r + \beta(v))^3}. \end{aligned} \quad (2.132)$$

Для выполнения слабых энергетических условий необходимо потребовать $D(v) \geq 0$. При таком условии $\rho \geq 0$ и $\rho + P \geq 0$, следовательно, слабые энергетические условия выполняются во всём пространстве-времени.

Уравнение состояния принимает вид:

$$P = -\frac{\beta(v)}{r + \beta(v)}\rho. \quad (2.133)$$

Если $\beta(v) \rightarrow 0$, то $P \rightarrow 0$, и мы приходим к уравнению состояния пыли. В пределе $\beta \ll r$ уравнение состояния аппроксимируется как:

$$P \approx -\frac{\beta(v)}{r}\rho. \quad (2.134)$$

Более того, заметим, что:

$$0 \leq \frac{\beta(v)}{r + \beta(v)} \leq 1, \quad (2.135)$$

что означает $\rho \geq |P|$, т.е. доминантные энергетические условия также выполняются во всём пространстве-времени.

Плотность энергии и давление имеют конечные значения при $r \rightarrow 0$:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \rho = \frac{2D(v)}{\beta^2(v)}, \quad \lim_{r \rightarrow 0} P = -\frac{2D(v)}{\beta^2(v)}, \quad (2.136)$$

что указывает на регулярность физических величин в центре.

Чтобы решение (2.130) описывало регулярную чёрную дыру, необходимо потребовать:

$$\lim_{r \rightarrow 0} M(v, r) = 0. \quad (2.137)$$

Вычислим этот предел:

$$\lim_{r \rightarrow 0} M(v, r) = M_0(v) + D(v)\beta(v) - 2\beta(v)D(v) \ln |\beta(v)| - \frac{\beta^2(v)D(v)}{\beta(v)} = M_0(v) - 2\beta(v)D(v) \quad (2.138)$$

Таким образом, условие регулярности:

$$M_0(v) - 2\beta(v)D(v) \ln |\beta(v)| = 0 \quad \Rightarrow \quad D(v) = \frac{M_0(v)}{2\beta(v) \ln |\beta(v)|}. \quad (2.139)$$

Поскольку $\beta(v)$ — бесконечно малый положительный параметр ($\beta \ll 1$), то $\ln |\beta(v)| < 0$, а значит знаменатель отрицателен. При $M_0(v) > 0$, получаем $D(v) < 0$.

Однако $D(v) < 0$ влечёт $\rho < 0$, что нарушает слабые энергетические условия во всём пространстве-времени. Это означает, что предложенный метод регуляризации в случае пыли не позволяет получить физически допустимую регулярную чёрную дыру: хотя геометрия остаётся регулярной, источник энергии-импульса становится неприемлемым с физической точки зрения.

Следовательно, метод сдвига $r \rightarrow r + \beta(v)$ не работает для случая пыли при требовании физически корректных энергетических условий.

2.6.2 Случай $\alpha = -\frac{1}{2}$

Этот случай подразумевает наличие экзотической материи в начальные моменты гравитационного коллапса. Такую модель следует рассматривать как коллапс обычного вещества, которое подвергается фазовому переходу, начиная с некоторого радиуса $r = r_b$, после которого вещество приобретает уравнение состояния $\alpha = -\frac{1}{2}$. В этом случае уже сформировавшееся вещество нуждается в регуляризации для предотвращения сингулярности в центре.

В данном конкретном случае уравнение (2.129) приводит к решению:

$$M(v, r) = M_0(v) + D(v)(r + \beta(v))^2 - 4\beta(v)D(v)(r + \beta(v)) + \beta^2(v)D(v) \ln |r + \beta(v)|. \quad (2.140)$$

Снова отметим, что в пределе $\beta(v) \rightarrow 0$ мы восстанавливаем исходное решение Хусейна с уравнением состояния $P = -\frac{1}{2}\rho$:

$$M(v, r) = M_0(v) + D(v)r^2. \quad (2.141)$$

Плотность энергии и давление для решения (2.140) имеют вид:

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{4D(v)}{r + \beta(v)}, \\ P &= -\frac{2D(v)(r + 2\beta(v))}{(r + \beta(v))^2}.\end{aligned}\quad (2.142)$$

Легко видеть, что при $r \rightarrow 0$ как плотность энергии, так и давление имеют конечные пределы:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \rho = \frac{4D(v)}{\beta(v)}, \quad \lim_{r \rightarrow 0} P = -\frac{4D(v)}{\beta(v)}, \quad (2.143)$$

что свидетельствует о регулярности физических характеристик в центре.

Уравнение состояния вблизи центра записывается как:

$$P = -\frac{1}{2} \frac{r + 2\beta(v)}{r + \beta(v)} \rho. \quad (2.144)$$

При $\beta(v) \rightarrow 0$ это уравнение переходит в $P = -\frac{1}{2}\rho$, соответствующее исходному случаю. Вдали от центра, при $\beta(v) \ll r$, оно аппроксимируется выражением:

$$P \approx -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\beta(v)}{r}\right) \rho. \quad (2.145)$$

Для выполнения слабых энергетических условий необходимо потребовать $D(v) > 0$. При этом $\rho > 0$ и $\rho + P = \rho \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r+2\beta}{r+\beta}\right) > 0$, поскольку $\frac{r+2\beta}{r+\beta} < 2$, следовательно, $\rho + P > 0$. Таким образом, слабые энергетические условия выполняются во всём пространстве-времени.

Энергодоминантные условия ($\rho \geq |P|$) также выполняются, поскольку:

$$|P| = \frac{1}{2} \frac{r + 2\beta(v)}{r + \beta(v)} \rho \leq \rho, \quad (2.146)$$

а коэффициент $\frac{1}{2} \frac{r+2\beta(v)}{r+\beta(v)} \leq 1$ при всех $r \geq 0$, $\beta > 0$. Действительно, функция $\frac{r+2\beta}{r+\beta} = 1 + \frac{\beta}{r+\beta} \leq 2$, поэтому $\frac{1}{2} \cdot \frac{r+2\beta}{r+\beta} \leq 1$.

Таким образом, доминантные энергетические условия выполняются автоматически повсеместно.

Для того чтобы полученное решение (2.140) описывало регулярную чёрную дыру, необходимо выполнение условия $\lim_{r \rightarrow 0} M(v, r) = 0$. Вычислим

этот предел:

$$\lim_{r \rightarrow 0} M(v, r) = M_0(v) + D(v)\beta^2(v) - 4D(v)\beta^2(v) + D(v)\beta^2(v) \ln |\beta(v)| = M_0(v) - 3D(v), \quad (2.147)$$

Требую равенства нулю:

$$M_0(v) + D(v)\beta^2(v) (\ln |\beta(v)| - 3) = 0, \quad (2.148)$$

получаем:

$$D(v) = \frac{M_0(v)}{\beta^2(v) (3 - \ln |\beta(v)|)}. \quad (2.149)$$

В отличие от случая пыли, здесь при $\beta(v) \ll 1$ величина $\ln |\beta(v)| < 0$, поэтому знаменатель положителен: $3 - \ln |\beta(v)| > 3$. Следовательно, при $M_0(v) > 0$ получаем $D(v) > 0$, что гарантирует выполнение слабых энергетических условий во всём пространстве-времени.

Таким образом, в случае $\alpha = -\frac{1}{2}$ предложенный метод регуляризации $r \rightarrow r + \beta(v)$ позволяет построить физически допустимое решение, описывающее регулярную чёрную дыру с ядром де Ситтера и корректным поведением источника энергии-импульса.

2.6.3 Общий случай

В общем случае, когда $\alpha \in [-1, 1]$, $\alpha \neq 0, \alpha \neq \pm\frac{1}{2}$, уравнение (2.129) приводит к решению

$$M(v, r) = M_0 + D(v)[r + \beta(v)]^{1-2\alpha} + \frac{(1 - 2\alpha)\beta(v)D(v)}{\alpha[r + \beta(v)]^{2\alpha}} - \frac{\beta^2(v)D(v)(1 - 2\alpha)}{(1 + 2\alpha)[r + \beta(v)]^{1+2\alpha}}. \quad (2.150)$$

В пределе $\beta \rightarrow 0$, решение (2.150) переходит в решение Хусэйна

$$M(v, r) = M_0(v) + D(v)r^{1-2\alpha}, \quad \beta(v) \equiv 0. \quad (2.151)$$

Физические величины - плотность энергии и давления для решения (2.150) имеют вид

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{(1 - 2\alpha)D(v)}{[r + \beta(v)]^{2+2\alpha}}, \\ P &= -\frac{(1 - 2\alpha)D(v)}{[r + \beta(v)]^{2+2\alpha}} + \frac{(\alpha + 1)(1 - 2\alpha)D(v)r}{[r + \beta(v)]^{3+2\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.152)$$

Откуда, мы замечаем, что уравнение состояния вблизи центра принимает вид

$$P = \frac{\alpha r - \beta}{r + \beta} \rho. \quad (2.153)$$

При $\beta \rightarrow 0$ уравнение состояния переходит в баротропное уравнение состояния $P = \alpha \rho$. На случай $\alpha \in [-1, 1]$ доминантное энергетическое условие выполняется во всем пространстве-времени. При этом слабое энергетическое условие выполняется во всем пространстве-времени если

- $D(v) > 0$ при $\alpha < \frac{1}{2}$;
- $D(v) < 0$ если $\alpha > \frac{1}{2}$.

Уравнение состояния (2.153) на больших расстояниях, при $\beta \ll r$ ведет себя как

$$P \approx \left[\alpha \left(1 - \frac{\beta}{r} \right) - \frac{\beta}{r} \right] \rho. \quad (2.154)$$

Поскольку плотность энергии и давление конечны при $r \rightarrow 0$, то, для того, чтобы получить регулярную черную дыру, нам необходимо удовлетворить последнему условию $\lim_{r \rightarrow 0} M(v, r) = 0$, которое приводит нас к следующему соотношению

$$D(v) = -\frac{M_0(v)(\alpha + 2\alpha^2)}{\beta(v)^{1-2\alpha}}. \quad (2.155)$$

Однако, как мы выяснили в предыдущих пунктах, не все значения α нам подходят в виду требований накладываемых слабым энергетическим условием. В данном случае, выполнение слабого энергетического условия требует, чтобы

$$\text{regular black hole} + \text{weak energy condition} \rightarrow \alpha \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \quad (2.156)$$

2.6.4 Регуляризация заряженной черной дыры Вайдья

В качестве явного примера рассмотрим случай $\alpha = 1$. Этот случай соответствует известному решению Бонора–Вайдья, которое является динамическим обобщением заряженной чёрной дыры Рейсснера–Нордстрема. Функция $D(v)$ принимает вид $D(v) = -\frac{Q^2(v)}{2}$.

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M_0(v)}{r} + \frac{Q^2(v)}{r^2} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2. \quad (2.157)$$

Используя уравнение (2.129) для случая $\alpha = 1$, мы приходим к следующему пространству-времени

$$\begin{aligned} ds^2 &= -f(v, r)dv^2 + 2dvdr + r^2d\Omega^2, \\ f(v, r) &= 1 - \frac{2M_0(v)}{r} + \frac{3Q^2(v)r^2 + 3Q^2(v)\beta(v)r + Q(v)^2\beta(v)^2}{3[r + \beta(v)]^3}. \end{aligned} \quad (2.158)$$

Отметим, что это решение переходит в решение Бонора–Вайдья в пределе $\beta \rightarrow 0$. Пространство-время (2.158) описывает регулярную чёрную дыру только в том случае, если параметр β принимает вид

$$\beta(v) = \frac{Q^2(v)}{6M_0(v)}. \quad (2.159)$$

Подставляя это в (2.158), мы получаем регуляризованную чёрную дыру Бонора–Вайдья

$$f(v, r) = 1 - \frac{2M_0(v)}{r} + \frac{3Q^2(v)r^2 + \frac{Q^4(v)r}{2M_0(v)} + \frac{Q^6(v)}{36M_0^2(v)}}{3r \left[r + \frac{Q^2(v)}{6M_0(v)} \right]^3}. \quad (2.160)$$

2.7 Регулярная черная дыра как результат гравитационного коллапса пыли и излучения

Мы описали несколько моделей образования регулярной чёрной дыры. Все описанные модели можно разделить на два подкласса

1. Рассматриваются два решения уравнений Эйнштейна, одно из которых описывает регулярный центр, а другое — изначальное распределение вещества. Эти два решения сшиваются на некоторой гиперповерхности σ , внутри которой обычное вещество претерпевает фазовые переходы ввиду большой плотности, и образуется регулярный центр.
2. Мы также можем регуляризовать известное решение уравнений Эйнштейна, предположив существование некоторого параметра регуляризации β , который препятствует образованию сингулярности.

Однако ни первый, ни второй классы не объясняют физические процессы, приводящие к образованию регулярного центра и ядра де Ситтера.

Все дело в том, что мы практически любую метрику можем регуляризовать, предположив существование параметра регуляризации β . Точно так же всегда существует возможность сшить любое решение уравнений Эйнштейна, описывающее регулярную чёрную дыру, с ещё одним решением уравнения Эйнштейна, источником которого является обычная материя.

В этом параграфе мы рассмотрим гравитационный коллапс вещества, состоящего из комбинации пыли и излучения, и попытаемся понять процессы, которые могут привести к образованию регулярного центра. Как обычно, мы предположим, что пространство-время описывается общей метрикой сферически-симметричного пространства-времени в виде

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M(v, r)}{r} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2, \quad (2.161)$$

Поток энергии, плотность энергии и давление имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma(v, r) &= \frac{2\dot{M}(v, r)}{r^2}, \\ \rho(v, r) &= \frac{2M'(v, r)}{r^2}, \\ P(v, r) &= -\frac{M''}{r}. \end{aligned} \quad (2.162)$$

Мы также предположим, что плотность энергии и давление связаны баротропным уравнением состояния

$$P = \alpha\rho. \quad (2.163)$$

Теперь мы предположим, что коллапсирующее вещество состоит не из одной компоненты, а из комбинации пыли и излучения

$$\rho = \rho_d + \rho_r. \quad (2.164)$$

Где ρ_d и ρ_r — плотности энергии пыли и излучения. Следовательно, давление тоже будет представлять собой комбинацию давления пыли и излучения

$$P = P_d + P_r. \quad (2.165)$$

Как результат, вещество мы будем описывать двумя уравнениями состояния

$$P_d = 0, \quad P_r = \frac{1}{3}\rho_r. \quad (2.166)$$

Введем дополнительное уравнение, которое является следствием закона сохранения тензора энергии-импульса $T^i{}_{;k} = 0$. Его можно записать в виде

$$\rho' r + 2\rho + 2P = 0. \quad (2.167)$$

В качестве первой модели мы рассмотрим случай, когда две компоненты — пыль и излучение — не взаимодействуют друг с другом. Это означает, что мы имеем два уравнения непрерывности, которые могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \rho'_d r + 2\rho_d &= 0, \\ \rho'_r r + \frac{8}{3}\rho_r &= 0. \end{aligned} \quad (2.168)$$

В частности, это означает, что между двумя компонентами вещества нет обмена энергией, т.е. они не взаимодействуют. Решая систему уравнений, мы найдем плотность энергии пыли и излучения в виде

$$\begin{aligned} \rho_d(v, r) &= \rho_{0d}(v)r^{-2}, \\ \rho_r(v, r) &= \rho_{0r}(v)r^{-\frac{8}{3}}. \end{aligned} \quad (2.169)$$

Используя выражение для плотности энергии (2.162)

$$\rho = \rho_{0d}r^{-2} + \rho_{0r}r^{-\frac{8}{3}} = \frac{2M'}{r^2}, \quad (2.170)$$

мы приходим к решению представленному в виде

$$M(v, r) = M_0(v) + \frac{1}{2}\rho_{0d}r + \frac{3}{2}\rho_{0r}r^{\frac{1}{3}}. \quad (2.171)$$

Несложно видеть, что полученное решение представляет собой решение Хусэйна для комбинации пыли и излучения. Очевидно, что решение (2.171) описывает сингулярную черную дыру, т.к. все три условия регулярного центра нарушаются, т.е. плотность энергии и давление расходятся в центре, а массовая функция не обращается в ноль:

$$\lim_{r \rightarrow 0} M(v, r) = M_0(v) \neq 0, \quad (2.172)$$

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\rho_{0d}(v)}{r^2} + \frac{\rho_{0r}(v)}{r^{\frac{8}{3}}} &\rightarrow +\infty, \\ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\rho_{0r}(v)}{3r^{\frac{8}{3}}} &\rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (2.173)$$

Следовательно, нам необходимо предположить наличие дополнительной материи, которая вела бы к образованию регулярного центра, либо предложить физический процесс, который во время гравитационного коллапса приводит к регулярному центру.

Предположим, что в процессе гравитационного коллапса материя превращается в излучение. Это означает, что несмотря на то, что общий тензор энергии-импульса системы сохраняется $T_{;k}^{ik} = 0$, отдельные его компоненты сами по себе не сохраняются, что свидетельствует о том, что между компонентами есть обмен энергией. Мы можем записать это в виде

$$\begin{aligned}\rho_d' r + 2\rho_d &= -\beta\rho_r, \\ \rho_r' r + \frac{8}{3}\rho_r &= \beta\rho_r.\end{aligned}\quad (2.174)$$

Где β — безразмерная константа. Если эта константа положительна, то идет поток энергии от материи к излучению, если отрицательна — наоборот. Решая эту систему дифференциальных уравнений, мы приходим к следующему результату

$$\begin{aligned}\rho_r &= \rho_{0r} r^{\beta - \frac{8}{3}}, \\ \rho_m &= r^{-2} \left(\rho_{0m} - \frac{\beta\rho_{0r}}{\beta - \frac{2}{3}} r^{\beta - \frac{2}{3}} \right).\end{aligned}\quad (2.175)$$

Эти плотности энергии в комбинации приводят к решению уравнений Эйнштейна в виде

$$M(v, r) = M_0(v) + \frac{1}{2}\rho_{0m}(v)r - \frac{\rho_{0r}}{3(\beta - \frac{2}{3})(\beta + \frac{1}{3})} r^{\beta + \frac{1}{3}}.\quad (2.176)$$

Заметим, что в отсутствии взаимодействия $\beta \rightarrow 0$ решение (2.176) переходит в решение Хусейна для комбинации пыли и излучения (2.171). Важное отличие от предыдущего случая заключается в том, что при значении параметра взаимодействия $\beta \geq \frac{8}{3}$ возможно получить конечные значения плотности энергии и давления в центре, если выполняется следующее условие

$$\rho_{0m}(v) = \frac{\beta\rho_{0r}(v)}{\beta - \frac{2}{3}}.\quad (2.177)$$

Однако, несмотря на это, решение (2.176) не ведет к образованию регулярного центра, в виду того, что не выполняется третье условие, т.е. равенство нулю

массовой функции в центре. Следовательно, добавление взаимодействия не приводит к образованию регулярного центра, и мы вновь получаем сингулярную чёрную дыру.

Наконец, предложим следующую модель гравитационного коллапса. Пусть в начальный момент времени вещество состоит из комбинации пыли и излучения. При этом они не взаимодействуют друг с другом. В процессе гравитационного коллапса в какой-то момент пыль начинает превращаться в излучение, и чем ближе к центру, тем быстрее происходит этот процесс. Как результат, параметр взаимодействия β должен быть функцией времени и расстояния. Таким образом, уравнения непрерывности можно записать в виде

$$\begin{aligned}\rho'_d r + 2\rho_d &= \beta(r)\rho_r, \\ \rho'_r r + \frac{8}{3}\rho_r &= -\beta(r)\rho_r.\end{aligned}\quad (2.178)$$

Мы также предполагаем, что взаимодействие растёт к центру, т.е. $\beta' < 0$. Решением системы уравнений (2.178) являются следующие профили плотностей энергии

$$\begin{aligned}\rho_r &= \rho_{0r}(v)e^{\int \frac{\beta(v,r)-\frac{8}{3}}{r} dr}, \\ \rho_m &= r^{-2} \left[c_1(v) - \int r\beta(v,r)\rho_{0r}e^{\int \frac{\beta(v,r)-\frac{8}{3}}{r} dr} dr \right].\end{aligned}\quad (2.179)$$

Здесь $c_1(v)$ и $\rho_{0r}(v)$ являются функциями интегрирования. Для решения уравнений Эйнштейна необходимо воспользоваться выражением плотности энергии (2.162)

$$\rho = \rho_r + \rho_m = \frac{2M'}{r^2}.\quad (2.180)$$

Формальное решение можно записать в виде

$$M(v, r) = M_0(v) + \frac{1}{2} \int r^2 (\rho_r + \rho_m) dr.\quad (2.181)$$

Получив массовую функцию в общем виде, мы можем сформулировать условия, которым должно удовлетворять решение, для того чтобы получившееся решение описывало регулярную чёрную дыру.

- Плотность энергии в центре должна принимать конечные значения. Важно отметить, что это возможно только в том случае, когда выражение в квадратных скобках обращается в ноль при $r \rightarrow 0$;

- Должно выполняться условие, что массовая функция в центре обращается в ноль: $\lim_{r \rightarrow 0} M(v, r) = 0$.

Из предыдущей модели мы знаем, что можем удовлетворить первому условию. Приведём пример, когда мы можем удовлетворить обоим условиям.

Пусть функция взаимодействия имеет вид

$$\beta(v, r) = \frac{8}{3} - a(v)r. \quad (2.182)$$

Как видно, это взаимодействие увеличивается к центру.

Подставляя это выражение в формулу (2.179), мы приходим к решению

$$\begin{aligned} \rho_r &= \rho_{0r} e^{-ar}, \\ \rho_m &= r^{-2} \left[c_1 + \rho_{0r} \left(\frac{2}{3a^2} + \frac{2r}{3a} - r^2 \right) e^{-ar} \right]. \end{aligned} \quad (2.183)$$

Очевидно, что в центре ρ_r принимает конечные значения, в то время как ρ_m принимает конечные значения только в случае выполнения условия

$$c_1 = -\frac{2\rho_{0r}}{3a^2}. \quad (2.184)$$

Тогда итоговая плотность энергии всего вещества запишется в виде

$$\rho = \rho_m + \rho_r = \rho_{0r} r^{-2} \left[-\frac{2}{3a^2} + \left(\frac{2}{3a^2} + \frac{2r}{3a} \right) e^{-ar} \right]. \quad (2.185)$$

Подставляя это выражение в формулу для массовой функции (2.181), мы получаем после интегрирования

$$M(v, r) = M_0(v) - \frac{\rho_{0r}}{3a^2} r - \left(\frac{2}{3a^3} + \frac{1}{3a^2} r \right) \rho_{0r} e^{-ar}. \quad (2.186)$$

Для данного решения мы можем удовлетворить условию $\lim_{r \rightarrow 0} M(v, r) = 0$, если выполняется следующее условие:

$$M_0(v) = \frac{2\rho_{0r}(v)}{3a^3(v)}. \quad (2.187)$$

Наконец, мы получаем метрику, которая описывает регулярную чёрную дыру:

$$M(v, r) = M_0 \left[1 - \frac{ar}{2} - \left(1 + \frac{ar}{2} \right) e^{-ar} \right]. \quad (2.188)$$

Скаляр Кречмана ведёт себя в центре следующим образом:

$$\lim_{r \rightarrow 0} K = \frac{2M_0^2(v)}{3a^6}. \quad (2.189)$$

Важно отметить, что это решение справедливо только в той области, в которой происходят взаимодействия. Как результат, метрику (2.186) нельзя использовать для расчёта тени, квазинормальных мод и других свойств, связанных с горизонтом и его окрестностями. Для этих целей необходимо использовать метрику в виде (2.171) или (2.176).

2.8 Регулярная черная дыра как результат гравитационного коллапса барионного и кваркового вещества

Модель гравитационного коллапса пыли и излучения является сильно идеализированной. В данном параграфе, мы рассмотрим более реалистичный сценарий, при котором коллапс барионной материи приводит к образованию кварк-глюонной плазмы.

Мы предполагаем, что барионная материя переходит в кварк-глюонную плазму, поэтому, уравнения непрерывности могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} \rho'_b r + 2\rho_b + 2P_b &= -\beta(v, r)\rho_q, \\ \rho'_q r + 2\rho_q + 2P_q &= \beta(v, r)\rho_q. \end{aligned} \quad (2.190)$$

Здесь индексы b и q означают барионную и кварковую материи соответственно. В случае барионной материи, мы воспользуемся уже известным уравнением состояния:

$$P_b = \alpha\rho_b. \quad (2.191)$$

А в качестве модели кварк-глюонной плазмы, возьмем модель, которая широко применяется в космологии и астрофизике. Для этой модели уравнение состояния может быть записано в виде:

$$P_q = \frac{1}{3}(\rho_q - 4b), \quad (2.192)$$

Где b - константа, которая физически указывает на различие плотности энергий возмущенного и истинного вакуума в КХД.

Для дальнейшего анализа, полезно найти решение уравнений Эйнштейна соответствующее кварк-глюонной плазме. В этом случае, плотность энергии ρ_q может быть записана в виде

$$\rho_q(v, r) = b + C(v) r^{-8/3}, \quad (2.193)$$

Где $C(v)$ - функция интегрирования, связанная, как будет видно ниже с плотностью энергии излучения.

Интегрируя еще раз плотность энергии, мы наконец придем к выражению массовой функции в виде:

$$M(v, r) = M_0(v) + \frac{b}{6} r^3 + \frac{3}{2} C(v) r^{1/3}, \quad (2.194)$$

Заметим, что если $b = 0$, то решение переходит в решение Хусэйна соответствующее излучению.

В случае, если $b \neq 0$, то решение представляет собой решение Хусэйна-де Ситтера в случае излучения.

Возвращаясь теперь к системе (2.190) и подставляя туда уравнения состояния, мы приходим к системе

$$r \rho'_q r + \left(\frac{8}{3} - \beta(v, r) \right) \rho_q = \frac{8}{3} b, \quad (2.195)$$

$$r \rho'_b r + 2(1 + \alpha) \rho_b = -\beta(v, r) \rho_q. \quad (2.196)$$

Разумеется, в общем случае, когда не задано явное выражение для функции β эта система дифференциальных уравнений не может быть разрешена. Также как и для пыли переходящей в излучение, мы можем формально выписать выражения и для плотности энергий кварковой и барионной материи, так и формальное выражение для массовой функции.

Однако, мы предоставим явным пример того, что подобная модель может вести к регулярным черным дырам. Для этого рассмотрим функцию β в виде

$$\beta(v, r) = \frac{5}{3} - a(v) r, \quad a(v) > 0. \quad (2.197)$$

Заметим, что этот выбор функции β слегка отличается от выбора в предыдущей модели.

При сделанном выборе эффективной скорости перехода барионной материи в кварк-глюонную плазму, мы можем выписать плотность энергии кваркового вещества в виде

$$\rho_q(v, r) = \frac{c(v)}{r} e^{-a(v)r} + \frac{8b}{3a(v)r}. \quad (2.198)$$

Интегрирование в общем случае для произвольного значения параметра уравнения состояния α затруднительно и порой невозможно аналитически. В связи с тем, что мы заинтересованы в модели регулярной черной дыры, то для простоты вычислений рассмотрим простейшую модель пыли $\alpha = 0$.

В этом случае плотность энергии барионной материи принимает вид:

$$\rho_b(v, r) = \frac{1}{r^2} \left[e(v) + \frac{2c(v)}{3a(v)} e^{-a(v)r} - \frac{40br}{9a(v)} - r c(v) e^{-a(v)r} + \frac{4br^2}{3} \right]. \quad (2.199)$$

Исходя из выражений плотности энергий кварковой и барионной материй, мы можем выписать эффективную плотность энергии:

$$\rho_{\text{eff}}(v, r) = \frac{4b}{3} + \frac{3a(v)e(v) + 2c(v)e^{-a(v)r} - \frac{16}{3}br}{3a(v)r^2}. \quad (2.200)$$

Вновь производя интегрирование, мы приходим к выражению

$$M(v, r) = M_0(v) - \frac{c(v)}{3a(v)^2} e^{-a(v)r} + \frac{e(v)}{2} r - \frac{4b}{9a(v)} r^2 + \frac{2b}{9} r^3. \quad (2.201)$$

Для того, чтобы это решение описывало регулярную черную дыру, нам необходимо, чтобы эффективная плотность энергии оставалась конечной при $r \rightarrow 0$. Это выполняется только при выполнении условия:

$$a(v) = -\frac{2 \cdot 3^{1/3}}{3} \frac{b^{1/3}}{M_0(v)^{1/3}}. \quad (2.202)$$

Другие 2 условия вытекают из требования конечности эффективного давления в центре и исчезновении массовой функции при $r \rightarrow 0$. Мы можем записать их в виде:

$$c(v) = \frac{4b^{2/3} M_0(v)^{1/3}}{3^{1/3}}, \quad (2.203)$$

$$e(v) = \frac{4b^{1/3} M_0(v)^{2/3}}{3^{2/3}}. \quad (2.204)$$

В виду того, что массовая функция должна быть положительной величиной, следует, что константа b должна быть всегда отрицательной.

Наконец, применяя все эти условия к массовой функции, мы приходим к решению, которое описывает регулярную черную дыру:

$$M(v, r) = M_0(v) - \frac{c(v)}{3a(v)^2} e^{-a(v)r} + \frac{e(v)}{2} r - \frac{4b}{9a(v)} r^2 + \frac{2b}{9} r^3, \quad (2.205)$$

Как результат, инварианты кривизны при $r \rightarrow 0$ принимают вид Скаляр Кречманна

$$\lim_{r \rightarrow 0} K(r) = 16 \kappa^2, \quad (2.206)$$

скаляр Риччи

$$\lim_{r \rightarrow 0} R(r) = 4 \kappa, \quad (2.207)$$

Квадрат тензора Риччи

$$\lim_{r \rightarrow 0} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}(r) = 4 \kappa^2, \quad (2.208)$$

Где

$$\kappa = \frac{ac}{18} + \frac{2b}{9}. \quad (2.209)$$

Таким образом, мы показали, что гравитационный коллапс барионной материи, переходящий при критических плотностях в кварк-глюонную плазму, может формировать регулярный центр.

2.9 Формирование произвольной регулярной черной дыры

В двух предыдущих параграфах был описан процесс, который может привести к образованию регулярной черной дыры в результате гравитационного коллапса и перехода материи из одного состояния в другое. Однако, полученные решения не являются асимптотически-плоскими и были получены феноменологически, путем подбора функции β . Покажем, что при определенных выборах функции β , мы можем получить абсолютно любое решение уравнений Эйнштейна, описывающее черную дыру.

Мы предполагаем следующую модель: в результате гравитационного коллапса барионной материи, вещество переходит в новый тип вещества, в результате чего выделяется энергия в виде излучения электромагнитных волн. В связи с этим, рассматривая гравитационный коллапс барионного вещества и излучения, мы приходим к третьему, новому, типу вещества.

Выпишем систему уравнений соответствующих баротропному веществу и излучению

$$\begin{aligned}\rho_r' r + \frac{8}{3}\rho_r &= \beta(v, r)\rho_r, \\ \rho_b' r + (2 + 2\alpha)\rho_b &= -\beta(v, r)\rho_r.\end{aligned}\quad (2.210)$$

Интегрируя полученные уравнения, мы приходим к плотностям энергии излучения и барионной материи в виде:

$$\begin{aligned}\rho_r &= \rho_{0r} e^{\int \frac{\beta - \frac{8}{3}}{r} dr}, \\ \rho_b &= r^{-(2\alpha+2)} \left[C(v) - \rho_{0r} \int r^{1+2\alpha} \beta e^{\int \frac{\beta - \frac{8}{3}}{r} dr} dr \right].\end{aligned}\quad (2.211)$$

В результате данного процесса, плотность барионной материи будет уменьшаться, а плотность излучения возрастать. Более того, в зависимости от скорости процесса β , мы будем получать новый тип вещества ρ_{new} . Для того, чтобы найти связь нового типа материи со скоростью преобразования материи β , мы должны решить следующее интегральное уравнение:

$$\rho_{new} = \rho_r + \rho_b.\quad (2.212)$$

Более того, в результате данного процесса, количество барионной материи уменьшается, что отображается в условии $\dot{C} \leq 0$. Следовательно процесс гравитационного коллапса можно разделить на три стадии:

1. Стадия I. Коллапс барионной материи. В начальный момент времени $v = 0$ гравитационный коллапс начинается. Первая стадия описывается гравитационным коллапсом барионной материи без перехода одного вещества в другое. Эта стадия заканчивается при достижении критических плотностей и температур, начиная с которых начинается фазовый переход вещества.

2. Стадия II. Переходная стадия. В момент времени $v = v_1$ начинается фазовый переход вещества, который сопровождается выбросом энергии в виде электромагнитного излучения. При этом процессе, количество барионной материи уменьшается, а количество нового вещества увеличивается. Этот процесс заканчивается в момент времени $v = v_2$, который знаменует полный переход барионной материи в новый тип вещества.
3. Стадия III. Финальная стадия. В этот момент барионная материя отсутствует $C(v) \equiv 0$, более того, электромагнитное излучение тоже отсутствует. Все пространство-время внутри коллапсирующего облака описывается новым типом материи ρ_{new} . Именно исходя из того, как ведет себя новый тип материи в центре, мы и будем судить о том, формируется ли регулярная черная дыра или нет.

Решая интегральное уравнение выше, мы приходим к связи скорости преобразования материи β с новым типом вещества

$$\beta = \frac{\frac{2}{3}\alpha\rho_{new} - (2\alpha + \frac{8}{3})P_{new} - P'_{new}r}{\alpha\rho_{new} - P_{new}}. \quad (2.213)$$

Подставляя это значение β в плотности барионной материи и излучения, получаем:

$$\int \frac{\beta - \frac{8}{3}}{r} dr = \ln |\alpha\rho_{new} - P_{new}|. \quad (2.214)$$

Новый тип вещества, также подчиняется уравнению непрерывности. А следовательно

$$\rho'_{new}r + 2\rho_{new} + 2P_{new} = 0. \quad (2.215)$$

Следовательно, мы можем оценить плотность излучения как функцию параметров нового вещества как

$$\rho_r = \rho_{0r} (\alpha\rho_{new} - P_{new}). \quad (2.216)$$

Чтобы определить как уменьшается плотность барионной материи, введем новую функцию g посредством формулы

$$g(r) \equiv r^{2\alpha+2} (a\rho_{new} + bP_{new}). \quad (2.217)$$

Возьмем производную по r от этой функции и воспользуемся уравнением непрерывности (2.215), находим

$$g'(r) = r^{1+2\alpha} [2\alpha a \rho_{new} + ((2\alpha + 2)b - 2a) P_{new} + b P'_{new} r]. \quad (2.218)$$

Это уравнение позволит нам оценить интегралы входящие в определение плотности энергии барионной материи.

Теперь, подставляя выражение для β в подынтегральное выражение ρ_b , мы находим

$$r^{1+2\alpha} \beta e^{\int \frac{\beta - \frac{8}{3}}{r} dr} = r^{1+2\alpha} \left[\frac{2\alpha}{3} \rho_{new} - \left(\frac{8}{3} + 2\alpha \right) P_{new} - P'_{new} r \right]. \quad (2.219)$$

Сравнивая коэффициенты с выражением (2.218), мы найдем

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = -1. \quad (2.220)$$

Таким образом, плотность энергии барионной материи выражается через плотность энергии новой материи посредством формулы

$$\rho_b = -\rho_{0r} \left(\frac{1}{3} \rho_{new} - P_{new} \right). \quad (2.221)$$

Таким образом, зная законы по которым происходит переход одного типа материи в другой, мы можем оценить, по излучаемой энергии, к какому типу черной дыры приведет коллапс - сингулярному или регулярному.

Результаты исследований приведенных в данной главе были отображены в следующих статьях:

- Модели гравитационного коллапса с образованием сингулярной черной дыры были исследованы в статьях [10, 192, 193, 202, 228];
- Свойства обобщенного пространства-времени Вайдья включающие локализацию горизонтов, конформные симметрии, отрицательные энергии, динамичный заряженный процесс Пенроуза были отображены в статьях [102, 107, 194];
- Зависимость горизонтов видимости от энергетических условий и испарение черных дыр были отображены в статье [229].

- Динамическое обобщение регулярных черных дыр Дымниковой и черной дыры с веществом Хагедорна были опубликованы в статье [40]
- Модели гравитационного коллапса материи переходящей в излучение с образованием регулярной черной дыры опубликованы в статьях [39, 230, 231].

Глава 3

Тень черной дыры

3.1 Общие замечания

В этом параграфе мы обсудим, что такое тень черной дыры в случае произвольной сферически-симметричной чёрной дыры, а также рассмотрим явный пример тени, отбрасываемой чёрной дырой Шварцшильда.

Если рассмотреть чёрную дыру, расположенную между наблюдателем и источником света (например, далёкими звёздами), то световые лучи, проходя вблизи чёрной дыры, будут искривляться. Эти лучи проходят на различных расстояниях от чёрной дыры. Некоторые из них после искривления достигают наблюдателя, а другие заканчивают свой путь внутри чёрной дыры. Существуют также лучи, которые проходят на таком расстоянии $r = r_{\text{ph}} = \text{const}$, что они движутся по неустойчивым круговым орбитам вокруг чёрной дыры. Такие орбиты являются неустойчивыми: любое малое возмущение координаты r приводит к тому, что луч либо уходит на бесконечность к наблюдателю, либо падает в чёрную дыру. Радиус, при котором существуют такие неустойчивые круговые орбиты, называется радиусом фотон сферы, а совокупность этих орбит образует вокруг чёрной дыры структуру, известную как фотон сфера. Световые лучи от далёких звёзд, пересекающие фотон сферу, неизбежно захватываются чёрной дырой и не достигают наблюдателя. В результате на небесной сфере наблюдатель видит тёмное пятно — так называемую тень чёрной дыры.

Поскольку при анализе тени речь идёт о поведении световых лучей, для определения формы и размеров тени необходимо изучить траектории светоподобных геодезических в произвольной сферически-симметричной статической метрике:

$$ds^2 = -A(r) dt^2 + B(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.1)$$

Данная метрика не зависит от координат t и φ , что означает наличие двух сохраняющихся величин — энергии и углового момента, отнесённых к единице массы пробной частицы. Чтобы найти выражения для этих величин, запишем лагранжиан свободно движущейся частицы в метрике (3.1). В силу сферической симметрии движение всегда происходит в одной плоскости. Без ограничения общности можно рассмотреть движение в экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$. В этой плоскости лагранжиан принимает вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (-A\dot{t}^2 + B\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2), \quad (3.2)$$

где точка обозначает производную по аффинному параметру λ (т.е. $\dot{x}^i \equiv dx^i/d\lambda$). Из вида лагранжиана (3.2) находим выражение для энергии частицы:

$$E = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = A\dot{t}, \quad (3.3)$$

и для углового момента:

$$L = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = r^2\dot{\varphi}. \quad (3.4)$$

Используя условие движения в экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$ и интегралы движения (3.3) и (3.4), находим три из четырёх компонент касательного вектора:

$$\dot{t} = \frac{E}{A}, \quad \dot{\varphi} = \frac{L}{r^2}, \quad \dot{\theta} = 0. \quad (3.5)$$

Остаётся определить компоненту $\dot{r} = dr/d\lambda$. Для упрощения дальнейших выкладок положим $B(r) = A(r)^{-1}$, что выполняется, например, в метрике Шварцшильда. Тогда компоненту \dot{r} можно найти из условия, которому удовлетворяют светоподобные геодезические:

$$g_{ik} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda} = 0. \quad (3.6)$$

Подставляя компоненты (3.5) в условие (3.6) и разрешая полученное уравнение относительно \dot{r} , получаем искомую компоненту:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = -V_{eff}. \quad (3.7)$$

Где

$$V_{eff} = \frac{L^2}{r^2}A - E^2, \quad (3.8)$$

рассмотрим эффективный потенциал. Поскольку нас интересует круговое движение, это означает, что r должно быть постоянным. Это условие приводит к тому, что $\frac{dr}{d\lambda} = 0$, что, с учётом уравнения (3.7), даёт условие

$$V_{eff}(r_{tp}) = 0, \quad (3.9)$$

где $r = r_{tp}$ — точка поворота света. Для того чтобы r_{tp} был радиусом фотон сфера r_{ph} , необходимо выполнение следующего условия:

$$\left.\frac{dV_{eff}}{dr}\right|_{r=r_{tp}} = 0. \quad (3.10)$$

Таким образом, чтобы найти радиус фотон сферы, необходимо одновременно удовлетворить двум условиям: (3.9) и (3.10). Применим условие (3.10) к эффективному потенциалу (3.8):

$$\left.\frac{dV_{eff}}{dr}\right|_{r=r_{ph}} = 0 \quad \Rightarrow \quad A'(r_{ph})r_{ph} - 2A(r_{ph}) = 0. \quad (3.11)$$

Найдя радиус r_{ph} , необходимо также удовлетворить условию (3.9). Для продолжения введём понятие прицельного параметра b как отношения момента количества движения к энергии частицы:

$$b = \frac{L}{E}. \quad (3.12)$$

Условие (3.9) можно переписать через прицельный параметр (3.12):

$$V_{eff}(r_{ph}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{L^2}{r_{ph}^2}A(r_{ph}) - E^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{b^2}{r_{ph}^2}A(r_{ph}) - 1 = 0. \quad (3.13)$$

Разрешая это уравнение относительно прицельного параметра, находим его критическое значение — то есть такое b_{cr} , при котором $r = r_{ph}$ соответствует фотон сфере:

$$b = \frac{r_{ph}}{\sqrt{A(r_{ph})}}. \quad (3.14)$$

Наблюдатель будет видеть перед собой тёмное пятно. Если рассмотреть плоскость (x, y) , перпендикулярную лучу зрения наблюдателя, то отбрасываемая тень будет иметь форму окружности радиуса b , заданной параметрически:

$$\begin{aligned}x &= b \cos \phi, \\y &= b \sin \phi, \\0 &\leq \phi \leq 2\pi.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Рассмотрим пример тени, отбрасываемой сферически-симметричной нейтральной чёрной дырой Шварцшильда массой M . Метрика Шварцшильда имеет вид:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2.\tag{3.16}$$

Сравнивая метрику Шварцшильда (3.16) с общей метрикой (3.1), находим:

$$A(r) = 1 - \frac{2M}{r}, \quad B(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}.\tag{3.17}$$

Подставляя $A(r)$ в выражение для эффективного потенциала (3.8), получаем:

$$V_{\text{eff}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{L^2}{r^2} - E^2.\tag{3.18}$$

Используя условие (3.10):

$$\begin{aligned}\left. \frac{dV_{\text{eff}}}{dr} \right|_{r=r_{ph}} = 0 &\Rightarrow A'(r)r - 2A(r) = 0, \\&\Rightarrow \frac{2M}{r^2} \cdot r - 2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = 0, \\&\Rightarrow \frac{2M}{r} - 2 + \frac{4M}{r} = 0, \\&\Rightarrow \frac{6M}{r} = 2 \Rightarrow r_{ph} = 3M.\end{aligned}\tag{3.19}$$

Подставляя найденный радиус $r_{ph} = 3M$ в условие (3.9) и разрешая его относительно прицельного параметра (3.12), получаем:

$$\begin{aligned}
V_{\text{eff}} = 0 &\Rightarrow \left(1 - \frac{2M}{3M}\right) \frac{L^2}{(3M)^2} - E^2 = 0, \\
&\Rightarrow \left(1 - \frac{2}{3}\right) \frac{L^2}{9M^2} = E^2, \\
&\Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{L^2}{9M^2} = E^2 \Rightarrow \frac{L^2}{27M^2} = E^2, \\
&\Rightarrow b^2 = \frac{L^2}{E^2} = 27M^2 \Rightarrow b_{cr} = 3\sqrt{3}M.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Таким образом, критический прицельный параметр равен $b_{cr} = 3\sqrt{3}M$. При малом отклонении от этого значения траектория светового луча изменится качественно: если $b < b_{cr}$, луч падает в чёрную дыру; если $b > b_{cr}$, луч уходит на бесконечность к наблюдателю.

В заключение, приведём общую последовательность шагов для расчёта тени чёрной дыры в сферически-симметричном статическом случае. В такой метрике существуют два интеграла движения — энергия и момент количества движения световой частицы. Чтобы вычислить тень в метрике (3.1), необходимо выполнить следующие шаги:

1. Записать лагранжиан движения вдоль светоподобных геодезических:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (-At^2 + Br^2 + r^2\dot{\varphi}^2);$$

2. Найти энергию фотона: $E = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$, где $\dot{t} \equiv \frac{dt}{d\lambda}$, и момент количества движения: $L = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$, где $\dot{\varphi} \equiv \frac{d\varphi}{d\lambda}$;
3. Рассмотреть движение в экваториальной плоскости $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\theta} = 0$, и использовать условие нормировки:

$$g_{ik} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda} = 0,$$

чтобы найти $\frac{dr}{d\lambda}$ и определить эффективный потенциал $V_{\text{eff}}(r)$;

4. Приравнять производную эффективного потенциала к нулю:

$$\left. \frac{dV_{\text{eff}}}{dr} \right|_{r=r_{ph}} = 0,$$

и решить уравнение относительно r_{ph} — радиуса фотон сфера;

5. Подставить r_{ph} в условие $V_{\text{eff}}(r_{ph}) = 0$ и выразить критический прицельный параметр $b_{cr} = L/E$.

3.2 Влияние материи на тень черной дыры: сферически-симметричный случай.

Реальные астрофизические объекты не являются изолированными. Они всегда окружены аккреционным диском. В результате свет от источника, проходя мимо чёрной дыры, подвергается воздействию плазмы, окружающей чёрную дыру, что влияет на свойства тени. Исследования этого влияния можно разделить на два подхода:

- Рассмотреть метрику Шварцшильда (1.1) и учесть плазму, окружающую эту чёрную дыру. Зная свойства плазмы, можно исследовать движение света в плазме на фоне метрики Шварцшильда и выяснить, как наличие плазмы влияет на свойства тени.

- Второй подход заключается в том, чтобы рассмотреть чёрную дыру с аккреционным диском как единое решение уравнений Эйнштейна. После чего в полученной метрике исследовать свойства светоподобных геодезических и сравнить их с метрикой Шварцшильда, чтобы понять, какие отличия вносит наличие дополнительного вещества вблизи чёрной дыры.

Мы рассмотрим второй подход. В самом общем случае метрику произвольной чёрной дыры можно записать в виде:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{X(r)}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{X(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.21)$$

Здесь $X(r)$ — функция массы. Аккреционный диск вносит изменения в вид метрики пространства-времени. Однако по сравнению с гравитационным полем чёрной дыры эти изменения малы. Их можно учесть в виде деформаций:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{X(r)}{r}\right) e^{\alpha g(r)} dt^2 + \left(1 - \frac{X(r)}{r} + \alpha f(r)\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.22)$$

где функции $g(r)$ и $f(r)$ описывают деформации метрики, обусловленные наличием аккреционного диска, а α — малый параметр, характеризующий интенсивность этих деформаций.

Пространство-время (3.22) обладает двумя векторами Киллинга. Один из них соответствует временной трансляционной симметрии $K = \partial_t$ и отвечает за сохранение энергии, второй — осевой симметрии $N = \partial_\varphi$ и отвечает за сохранение момента количества движения. Если $u^i \equiv \frac{dx^i}{d\lambda}$ — 4-импульс фотона, то энергия и момент количества движения, отнесённые к единице массы, имеют вид:

$$E = -K^i u_i = \left(1 - \frac{X(r)}{r}\right) e^{\alpha g(r)} \frac{dt}{d\lambda}, \quad (3.23)$$

$$L = N^i u_i = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\lambda}. \quad (3.24)$$

Ограничиваясь движением в экваториальной плоскости $\theta = \frac{\pi}{2}$, радиальную компоненту u^r можно записать в виде:

$$\frac{\left(1 - \frac{X(r)}{r}\right) e^{\alpha g(r)}}{1 - \frac{X(r)}{r} + \alpha f(r)} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V_{\text{eff}}(r, L, E) = 0, \quad (3.25)$$

где эффективный потенциал V_{eff} задаётся выражением:

$$V_{\text{eff}}(r, L, E) = \left(1 - \frac{X(r)}{r}\right) e^{\alpha g(r)} \frac{L^2}{r^2} - E^2. \quad (3.26)$$

Как отмечалось в предыдущем параграфе, условия существования фотон сферы выводятся из требования кругового движения светового луча, при котором $\frac{dr}{d\lambda} = 0$. Эти условия задаются формулами:

$$V_{\text{eff}}(r_{ph}) = 0, \quad V'_{\text{eff}}(r_{ph}) = 0, \quad (3.27)$$

r_{ph} - радиус фотон сферы.

Решая второе уравнение (3.27) относительно r и подставляя полученный результат в первое условие, мы можем найти прицельный параметр $b = \frac{L}{E}$ в виде:

$$B = \frac{r_{ph}}{\sqrt{\left(1 - \frac{X(r_{ph})}{r_{ph}}\right) e^{\alpha g(r_{ph})}}}. \quad (3.28)$$

Для того чтобы оценить, как наличие материи влияет на свойства тени, в первую очередь необходимо найти тень недеформированной чёрной дыры, то есть при $\alpha = 0$. В этом случае эффективный потенциал принимает вид:

$$V_{\text{eff}} = \left(1 - \frac{X(r)}{r}\right) \frac{L^2}{r^2} - E^2. \quad (3.29)$$

Второе условие из (3.27) приводит к уравнению:

$$3X - X'r - 2r = 0. \quad (3.30)$$

Если $r = r_{ph}$ — решение этого уравнения, то из первого условия (3.27) можно вычислить прицельный параметр b :

$$B = \frac{r_{ph}}{\sqrt{1 - \frac{X(r_{ph})}{r_{ph}}}}. \quad (3.31)$$

Угловой размер тени, наблюдаемый на небе наблюдателем, находящимся на расстоянии r_o от чёрной дыры, определяется формулой:

$$\sin^2 \alpha_{sh} = \left(1 - \frac{X(r_o)}{r_o}\right) \frac{B^2}{r_o^2}. \quad (3.32)$$

Для случая, когда наблюдатель находится далеко от чёрной дыры ($r_o \gg r_h$), и при условии, что пространство-время асимптотически плоское, угловой размер можно приближённо записать как:

$$\alpha_{sh} \approx \frac{B}{r_o}. \quad (3.33)$$

Определив основные параметры тени недеформированной чёрной дыры — радиус фотон сферы, прицельный параметр и угловой размер, — мы можем вернуться к эффективному потенциалу деформированной метрики (3.26), чтобы оценить влияние материи на свойства тени чёрной дыры. Второе условие (3.27) для потенциала (3.26) приводит к следующему уравнению для определения радиуса фотон сферы:

$$3X - X'r - 2r + (r - X)\alpha g'r = 0. \quad (3.34)$$

Если r_{ph} — решение этого уравнения, то подстановка в первое условие (3.27) даёт прицельный параметр в виде:

$$B = \frac{r_{ph}}{\sqrt{1 - \frac{X(r_{ph})}{r_{ph}}}} e^{-\frac{1}{2}\alpha g(r_{ph})}. \quad (3.35)$$

В качестве примера рассмотрим метрику заряженной чёрной дыры Рейснера–Нордстрема.

$$\begin{aligned} ds^2 &= -f dt^2 + f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \\ f(r) &= 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Сравнивая с нашим примером, мы видим, что $X(r) \equiv 2M$, а деформации вызванные наличием заряда можно записать в виде

$$\alpha g(r) = \ln \left| 1 + \frac{Q^2}{r^2 - 2Mr} \right|. \quad (3.37)$$

В этом случае второе условие (3.27) приводит нас к уравнению

$$\begin{aligned} 3M - r + \frac{Q^2(M - r)}{r^2 - 2Mr + Q^2} &= 0, \\ r^2 - 3Mr + 2Q^2 &= 0, \\ r_{ph}^+ &= \frac{1}{2} \left(3M + \sqrt{9M^2 - 8Q^2} \right). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Подставляя радиусы в выражение для прицельного параметра (3.35), получаем

$$B = \frac{r_{ph}^+}{\sqrt{Mr_{ph}^+ - Q^2}}. \quad (3.39)$$

Однако для большинства метрик аналитическое нахождение радиуса фотон сферы невозможно, и для оценки радиуса тени чёрной дыры необходимо использовать приближённые методы.

Один из таких методов основан на предположении, что влияние дополнительной материи на метрику чёрной дыры пренебрежимо мало: $\alpha \ll 1$. В этом случае радиус фотон сферы r_{ph} можно разложить в ряд по малому параметру:

$$r_{ph} = r_{ph}^{(0)} + \alpha r_{ph}^{(1)}, \quad (3.40)$$

где $r_{ph}^{(0)}$ — решение уравнения (3.30), то есть радиус фотон сферы недеформированной чёрной дыры.

Подставляя разложение (3.40) в уравнение для определения фотон сферы (3.34) и раскладывая по степеням α , пренебрегая членами порядка $\mathcal{O}(\alpha^2)$

и выше, получаем:

$$\left[2X' \left(r_{ph}^{(0)} \right) - X'' \left(r_{ph}^{(0)} \right) r_{ph}^{(0)} - 2 \right] r_{ph}^{(1)} + \left[r_{ph}^{(0)} - X \left(r_{ph}^{(0)} \right) \right] g' \left(r_{ph}^{(0)} \right) r_{ph}^{(0)} = 0. \quad (3.41)$$

Отсюда находим поправку первого порядка:

$$r_{ph}^{(1)} = - \frac{\left[r_{ph}^{(0)} - X \left(r_{ph}^{(0)} \right) \right] g' \left(r_{ph}^{(0)} \right) r_{ph}^{(0)}}{2X' \left(r_{ph}^{(0)} \right) - X'' \left(r_{ph}^{(0)} \right) r_{ph}^{(0)} - 2}. \quad (3.42)$$

Заметим, что если $X(r) \equiv 2M$, то есть рассматривается метрика Шварцшильда (1.1) как недеформированное решение, то: - при $g' \left(r_{ph}^{(0)} \right) > 0$ дополнительная материя увеличивает радиус фотон сферы; - при $g' \left(r_{ph}^{(0)} \right) < 0$ радиус фотон сферы уменьшается.

Для рассмотренного ранее примера чёрной дыры Рейсснера–Нордстрема получаем:

$$\alpha g' (3M) = \frac{-4Q^2}{9M^2 - 3Q^2} < 0, \quad (3.43)$$

где учтено, что $r_{ph}^{(0)} = 3M$ для Шварцшильдова предела. Отсюда следует широко известный результат: электрический заряд чёрной дыры всегда приводит к уменьшению радиуса фотон сферы и, следовательно, к уменьшению тени.

Если недеформированная метрика не сводится к метрике Шварцшильда, то выражение для $r_{ph}^{(1)}$ (3.42) можно переписать через плотность энергии ρ_0 и давление P_0 вещества, оценённые на радиусе фотон сферы:

$$r_{ph}^{(1)} = - \frac{\left[r_{ph}^{(0)} - X \left(r_{ph}^{(0)} \right) \right] g' \left(r_{ph}^{(0)} \right) r_{ph}^{(0)}}{4 \left(r_{ph}^{(0)} \right)^2 \left(\rho_0 + P_0 \right) - 2}. \quad (3.44)$$

Здесь учтено, что $X'(r) = 8\pi r^2 \rho(r)$ в системе $G = c = 1$, и аналогично для давления. Вне горизонта величина $\left(r_{ph}^{(0)} \right)^2 \rho_0$ должна быть меньше единицы. Более того, мы предполагаем, что окружающая материя физична — её скорость не превосходит скорость света, что эквивалентно выполнению условия энергодоминантности: $|P_0| \leq \rho_0$. Следовательно, знаменатель в (3.44) остаётся отрицательным при типичных значениях ρ_0 и P_0 , что обеспечивает корректность знака поправки.

Таким образом, в общем случае: - если $g'(r_{ph}^{(0)}) > 0$, то радиус фотон сферы увеличивается под действием окружающей материи; - если $g'(r_{ph}^{(0)}) < 0$, то радиус фотон сферы уменьшается.

Мы установили, как наличие материи влияет на радиус фотон сферы. Теперь оценим её влияние на прицельный параметр (3.35) и, как следствие, на видимый угловой размер тени (3.32). Разложим прицельный параметр B в ряд по α :

$$B = B_0 + \alpha \left. \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (3.45)$$

где B_0 — прицельный параметр для недеформированной чёрной дыры, а

$$\left. \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = -\frac{B_0}{2} g(r_{ph}^{(0)}). \quad (3.46)$$

Подставляя это в (3.45), получаем:

$$\begin{aligned} B &= B_0 \left[1 - \alpha g(r_{ph}^{(0)}) \beta_0 \right], \\ \beta_0 &= \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{X(r_{ph}^{(0)})}{r_{ph}^{(0)}}} > 0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Отсюда следуют важные выводы: - если $g(r_{ph}^{(0)}) > 0$, то материя уменьшает радиус тени и её угловой размер; - если $g(r_{ph}^{(0)}) < 0$, то тень увеличивается как по радиусу, так и по угловому размеру.

Отметим, что формула (3.47) качественно совпадает с результатом из работы [96], где рассматривается влияние плазмы на тень чёрной дыры:

$$\alpha g(r_{ph}^{(0)}) \beta_0 = \left(1 - \frac{X}{r} \right) \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}, \quad (3.48)$$

где ω_p — плазменная частота, а ω_0 — частота фотона, измеренная наблюдателем на бесконечности.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих применение данного метода. Начнём с уже упомянутого решения Рейсснера–Нордстрема. Для этого решения характерно:

$$\alpha g(r) = \ln \left[1 + \frac{Q^2}{r^2 - 2mr} \right]. \quad (3.49)$$

Мы уже выяснили, что наличие электрического заряда всегда приводит к уменьшению фотон сферы по сравнению со Шварцшильдовским значением $3M$. Чтобы оценить влияние заряда на видимые размеры тени, подставим в функцию g значение радиуса фотон сферы Шварцшильда $r_{ph}^{(0)} = 3M$.

$$\alpha g \left(r_{ph}^{(0)} \right) = \ln \left[1 + \frac{Q^2}{3M^2} \right] > 0. \quad (3.50)$$

Как видно, наличие электрического заряда приводит не только к уменьшению радиуса фотон сферы, но и к уменьшению углового размера тени черной дыры по сравнению со случаем Шварцшильда. График 3.1 показывает поведение функции $\alpha g \left(r_{ph}^{(0)} \right)$ при изменении заряда Q и массы M . Как видно из графика, $\alpha g \left(r_{ph}^{(0)} \right)$ всегда остается положительной величиной, указывая на то, что тень черной дыры уменьшается. В следующем примере, мы разберем

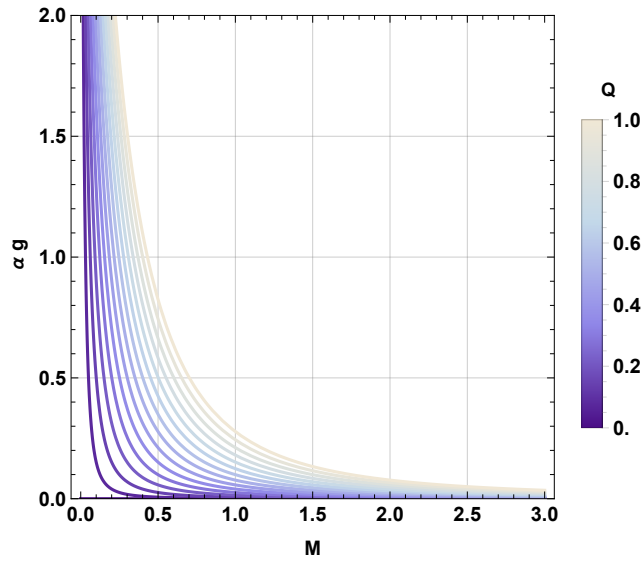


Рисунок 3.1: График демонстрирует изменение $\alpha g \left(r_{ph}^{(0)} \right)$ в связи с изменением массы M и заряда Q .

пример регулярной черной дыры Хэйворда

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (3.51)$$

$$f(r) = 1 - \frac{2Mr^2}{r^3 + 2ML^2}.$$

В общем случае, для этой метрики нет возможности аналитически рассчитать радиус фотон сферы и углового размера тени черной дыры. Однако, мы

посмотрим как меняется тень черной дыры Шварцшильда $L = 0$ в случае если параметр регуляризации отличен от нуля. В этом случае $X(r) = 2M$, а функция $g(r)$ принимает вид

$$\alpha g(r) = \ln \left[1 + \frac{4M^2 L^2}{(r - 2M)(r^3 + 2ML^2)} \right]. \quad (3.52)$$

Подставляя в эту формулу значение радиуса фотон сферы черной дыры Шварцшильда $r_{ph}^{(0)} = 3M$, приходим к выражению

$$\alpha g \left(r_{ph}^{(0)} \right) = \ln \left[1 + \frac{2L^2}{4M^2 + L^2} \right] > 0, \quad (3.53)$$

Как видно, параметр регуляризации приводит к тому, что тень черной дыры уменьшается по сравнению с тенью черной дыры Шварцшильда. На графике 3.2 продемонстрировано поведение функции $\alpha g \left(r_{ph}^{(0)} \right)$ в зависимости от параметров M и L . В качестве последнего примера рассмотрим черную ды-

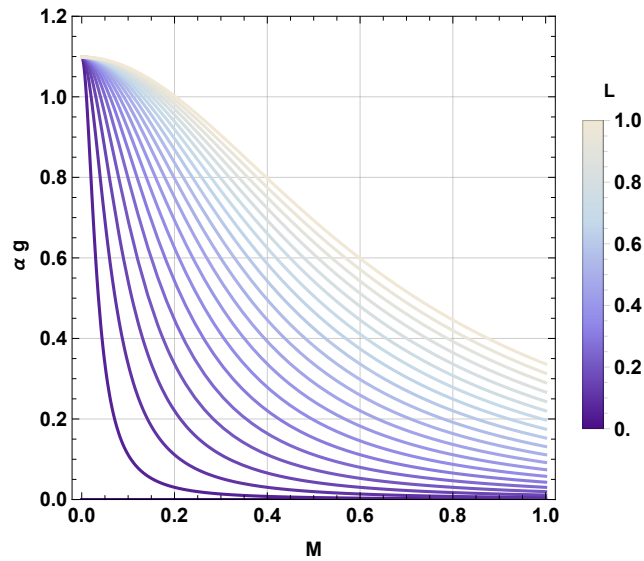


Рисунок 3.2: График демонстрирует изменение $\alpha g \left(r_{ph}^{(0)} \right)$ в зависимости от изменения массы M и параметра регуляризации L .

ру Эйнштейна-Эйлера-Гейзенберга. Эта черная дыра является результатом применения нелинейной электродинамике. функция $f(r)$ имеет вид

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{q_m^2}{r^2} - \frac{2\mu q_m^4}{5 r^6}. \quad (3.54)$$

Где q_m представляет собой магнитный заряд черной дыры, а параметр μ - константа связи с нелинейной электродинамикой Эйнштейна-Эйлера-

Гейзенберга. Если $tu \neq 0$, так $Q_m > 1$. Мы также сравниваем тень черной дыры с тенью черной дыры Шварцшильда $X(r) = 2M$, а функция $g(r)$ принимает вид

$$\alpha g(r) = \ln \left[\frac{10Mr^5 + 2\mu q^4 - 5q^2 r^4 - 5r^6}{5r^5(2M - r)} \right]. \quad (3.55)$$

Подставляя сюда $r_{ph}^{(0)} = 3M$, находим

$$\alpha g(r_{ph}^{(0)}) = \ln \left[1 - \frac{2\mu q^4}{1215M^6} + \frac{q^2}{3M^2} \right] < 0, \quad (3.56)$$

Откуда видно, что тень черной дыры меньше тени черной дыры Шварцшильда если выполняется условие $\mu > \frac{405M^4}{2q^2}$.

3.3 Влияние материи на тень черной дыры: стационарный случай

Описанный в предыдущем параграфе метод применим к сферически-симметричным чёрным дырам. Аналогичный подход можно развить и для случая вращающихся чёрных дыр.

Для оценки влияния дополнительной материи на вращающуюся чёрную дыру сначала рассмотрим сферически-симметричное решение, которое можно записать в виде:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{M(r)}{r} \right) e^{\alpha\gamma(r)} dt^2 + \left(1 - \frac{M(r)}{r} \right)^{-1} e^{-\alpha\gamma(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.57)$$

Для подобного класса метрик применим метод Ньюмана–Джэнкинса [232, 233], позволяющий построить вращающееся обобщение статического решения. Этот метод, применённый к заряженной чёрной дыре Рейсснера–Нордстрема, привёл к известному решению — вращающейся заряженной чёрной дыре Керра–Ньюмана. Применение данного метода к метрике (3.57) приводит к стационарной метрике вида:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2r m(r)}{\rho^2} \right) dt^2 + \frac{4ar m(r) \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \frac{\Sigma \sin^2 \theta}{\rho^2} d\phi^2, \quad (3.58)$$

где величины ρ^2 , Δ , Σ определяются следующим образом:

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (3.59)$$

$$\Delta = r^2 - 2r m(r) + a^2, \quad (3.60)$$

$$\Sigma = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta. \quad (3.61)$$

Функция $m(r)$ выражается через массовую функцию $M(r)$ исходной сферически-симметричной чёрной дыры следующим образом:

$$m(r) = \frac{1}{2} \left[e^{\alpha\gamma(r)} (2M(r) - r) + r \right]. \quad (3.62)$$

Здесь a — параметр вращения, $a = J/M$, где J — момент импульса чёрной дыры, а M — её масса на бесконечности (в асимптотически плоском пределе).

Исследование уравнений светоподобных геодезических в метрике (3.58) существенно отличается от сферически-симметричного случая, рассмотренного ранее. Поэтому далее мы кратко выведем уравнения движения для светоподобных частиц. Уравнение Гамильтона-Якоби имеет вид:

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu S \partial_\nu S, \quad (3.63)$$

Здесь λ - аффинный параметр, а S действие Якоби. В виду аксиальной симметрии, которой обладает метрика Eq. (3.58), в уравнении Eq. (3.63) можно разделить переменные

$$S = -E t + \Phi \phi + S_r(r) + S_\theta(\theta), \quad (3.64)$$

Где E и Φ - сохраняющиеся энергия и момент количества движения. Подставляя Eq. (3.64) в уравнение Гамильтона-Якоби Eq. (3.63), мы приходим к

$$S_r = \int \frac{\sqrt{R(r)}}{\Delta} dr, \quad (3.65)$$

$$S_\theta = \int \sqrt{\Theta(\theta)} d\theta,$$

Где

$$R = [(r^2 + a^2) E - a \Phi]^2 - \Delta [Q + (\Phi - a E)^2], \quad (3.66)$$

$$\Theta = Q - (\Phi^2 \csc^2 \theta - a^2 E^2) \cos^2 \theta,$$

Q - константа Картера. Разделив переменные, мы можем заняться вопросом изучения существования неустойчивых фотонных орбит. Они определяются условием $R = R' = 0$, что приводит нас к формулам

$$(a^2 - a \xi + r^2)^2 - (a^2 + r^2 F) [(a - \xi)^2 + \eta] = 0, \quad (3.67)$$

$$4(a^2 - a \xi + r^2) - [(a - \xi)^2 + \eta] (r F' + 2 F) = 0,$$

Где введены прицельные параметры $\xi = \Phi/E$ и $\eta = Q/E^2$. Решая систему уравнений выше относительно прицельных параметров, мы получаем условия, которым должны подчиняться прицельные параметры, чтобы существовала неустойчивая круговая орбита

$$\begin{aligned} \xi &= a + \frac{r^2}{a} - \frac{4(a^2 + r^2 F)}{a(r F' + 2 F)}, \\ \eta &= \frac{r^2 [r^2 + 2a(a - \xi) - (a - \xi)^2 F]}{a^2 + r^2 F}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Чтобы получить радиус фотонной орбиты r_{ps} , необходимо решить уравнение $\eta = 0$. Для наблюдателя расположенного в точке пространства-времени с координатами $(t_o, r_o, \theta_o, \phi_o)$, видимая форма тени черной дыры задается небесными координатами

$$\begin{aligned} \sigma &\equiv \lim_{r_o \rightarrow \infty} \left(-r_o^2 \sin \theta_o \frac{d\phi}{dr} \Big|_{(r_o, \theta_o)} \right) \\ &= -\frac{\xi}{\sin \theta_o}, \end{aligned} \quad (3.69)$$

и

$$\begin{aligned} \beta &\equiv \lim_{r_o \rightarrow \infty} \left(r_o^2 \frac{d\theta}{dr} \Big|_{(r_o, \theta_o)} \right) \\ &= \sqrt{\eta - \xi^2 \cot^2 \theta_o + a^2 \cos^2 \theta_o}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Рассмотрим теперь влияние дополнительной материи на кажущуюся форму тени. Как и в статичном случае, мы предполагаем, что изменения вызванные наличием акриционного диска пренебрежимо малы $\alpha \ll 1$. Выясним как меняются при этом прицельные параметры ξ и η . При этом, мы предположим

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_0 + \alpha\xi_1, \\ \eta &= \eta_0 + \alpha\eta_1.\end{aligned}\tag{3.71}$$

Где ξ_0 и η_0 - прицельные параметры соответствующие изотропным геодезическим в не деформированной метрике вращающейся черной дыры. Подставляя (3.71) в Eq. (3.68) и разлагая в ряд Тейлора по степеням α , мы находим в первом порядке

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{r [r(r-2M)(a^2+r(r-2M))\gamma'(r) + 2a^2(r-M)\gamma(r)]}{a(M-r)^2}, \\ \eta_1 &= -\frac{2r^3 [r(r-3M)(r-2M)(a^2+r(r-2M))\gamma'(r) + 2a^2M(M-r)\gamma(r)]}{a^2(M-r)^3}.\end{aligned}\tag{3.72}$$

Предположим, что не деформированная метрика - это метрика Керра. Для нее

$$\xi_0 = \frac{a^2(M+r) + r^2(r-3M)}{a(M-r)},\tag{3.73}$$

$$\eta_0 = -\frac{r^3 [r(r-3M)^2 - 4a^2M]}{a^2(M-r)^2}.\tag{3.74}$$

Подставляя (3.71) в уравнения Eq. (3.69) и Eq. (3.70) и учитывая определения ξ_1 и η_1 Eq. (3.72), мы приходим к выражению определяющему видимую форму тени черной дыры

$$\begin{aligned}\sigma &= -\frac{\xi_0 + \alpha\xi_1}{\sin \theta_o}, \\ \beta &= \sqrt{\eta_0 + \alpha\eta_1 - \xi_0(\xi_0 + 2\alpha\xi_1) \cot^2 \theta_o + a^2 \cos^2 \theta_o}.\end{aligned}\tag{3.75}$$

Если наблюдатель находится под углом $\theta_o = \frac{\pi}{2}$, то небесные координаты принимают вид

$$\begin{aligned}\sigma &= -\xi_0 - \alpha\xi_1, \\ \beta &= \sqrt{\eta_0 + \alpha\eta_1}.\end{aligned}\tag{3.76}$$

	r_{ps}^-	r_{ps}^+	R_{sh}
$\omega=0.1$	2.894	3.125	5.240
$\omega=0.2$	2.891	3.123	5.224
$\omega=0.3$	2.889	3.121	5.213
$\omega=0.4$	2.887	3.118	5.206
$\omega=0.5$	2.886	3.117	5.202

Таблица 3.1: Таблица демонстрирует поведение фотон сферы и тени черной дыры при изменении параметров ω при постоянных $M = 1$, $N = 0.01$, $\alpha = 0.1$, и $a = 0.1$.

Решая уравнение $\beta = 0$, мы найдем радиус фотон сферы r_{ps} . Подставляя все параметры, найдем

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{\alpha r^2 (2M - r) (a^2 + r(r - 2M)) \gamma'(r)}{a(M - r)^2} \\
&- \frac{(M - r) (a^2(M + r) - 2\alpha a^2 r \gamma(r) + r^2(r - 3M))}{a(M - r)^2}, \\
\beta^2 &= \frac{r^3 ((r - M) (4\alpha a^2 M \gamma(r) - 4a^2 M + r(r - 3M)^2))}{a^2(M - r)^3} \\
&- \frac{r^3 (2\alpha r(r - 3M)(r - 2M) (a^2 + r(r - 2M)) \gamma'(r))}{a^2(M - r)^3}. \quad (3.77)
\end{aligned}$$

В качестве примера, рассмотрим вращающейся аналог черной дыры Киселева. Имеем

$$\begin{aligned}
M &= \text{constant}, \\
\alpha \gamma(r) &= \ln \left| 1 - \frac{N}{r^{3\omega}(r - 2M)} \right|. \quad (3.78)
\end{aligned}$$

Радиус фотон сферы и тени черной дыры приведены в таблице 3.1 из которой видно, что при увеличении параметра уравнения состояния ω и радиус фотон сферы и радиус тени черной дыры уменьшается.

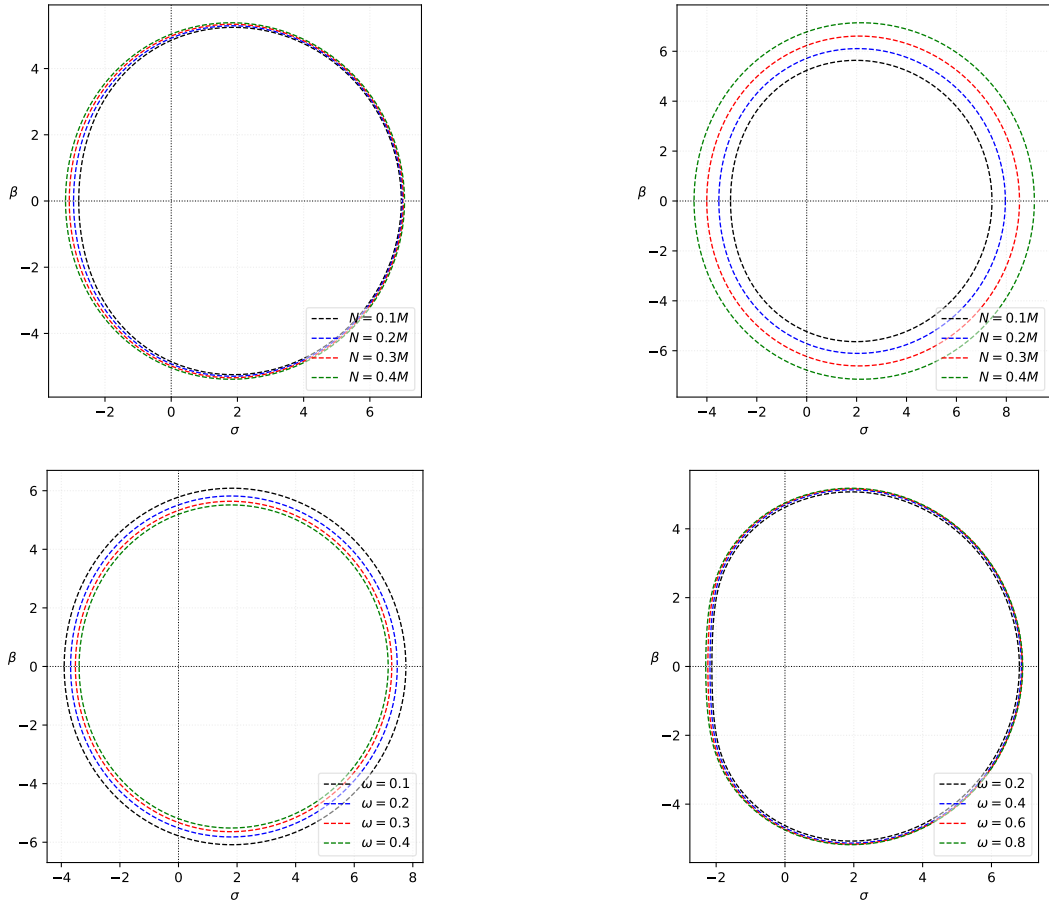


Рисунок 3.3: Тень черной дыры Киселева. ($a = 0.95M$, $\theta = \pi/2$). Верхний левый график : $\omega = 0.5$. Верхний правый график : $\omega = -0.15$. Нижний левый график: $N = 0.5M$. Нижний правый график: $N = -0.09M$.

3.4 Пример: тень черных дыр Шварцшильда и Рейсснера-Нордстрема при наличии дополнительной материи

В данном параграфе, мы рассмотрим различные методы исследования свойств теней черных дыр применительно к двум решениям - черным дырам Шварцшильда и Рейсснера-Нордстрема при минимальных геометрических деформациях. Снова рассмотрим метрику сферически-симметричного пространства-времени

$$ds^2 = -f dt^2 + f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.79)$$

3.4.1 Тень деформированной черной дыры Шварцшильда

Начнем мы рассмотрение с уже упоминавшейся метрике Шварцшильда при минимальных геометрических деформациях

$$f(r) = 1 - \frac{2m}{r} + \alpha e^{-\frac{r}{M}}, \quad (3.80)$$

Наша задача выяснить какие влияния оказывают параметры α и l на тень черной дыры. Для этого найдем производную от эффективного потенциала и приравняем ее к нулю

$$V'_{eff}(r_{ph}) = 0 \rightarrow \frac{6m}{r} - \alpha e^{-\frac{r}{M}} \left(\frac{r}{M} + 2 \right) - 2 = 0. \quad (3.81)$$

Мы можем предположить, что радиус фотон сферы не меняется при наличии аккреционного диска и равен $r_{ph} = 3M$. При этом должно выполняться следующее условие

$$r_{ph} = 3M \rightarrow l = \frac{5M}{e^3}. \quad (3.82)$$

Однако, тень черной дыры при этом меняться все же будет, поскольку прицельный параметр имеет следующее значение

$$b = \frac{3\sqrt{3}M}{\sqrt{1 - 2\alpha e^{-3}}}. \quad (3.83)$$

Как видно из уравнения (3.83), если $\alpha \rightarrow 0$, мы приходим к тени черной дыре Шварцшильда $b = 3\sqrt{3}M$. Если же материя окружает черную дыру Шварцшильда, то она увеличивает размеры тени, если выполняется условие

$$0 < \alpha < \frac{e^3}{2}. \quad (3.84)$$

Заметим, что влияние материи пренебрежимо мало. Это означает, что $\alpha \ll 1$, что исключает паталогическую ситуацию $\alpha = \frac{e^3}{2} \rightarrow b = \infty$ когда радиус тени черной дыры стремится к бесконечности. Однако, если мы рассмотрим произвольные значения α и l , то найти аналитическое решение становится невозможным. Поэтому, поскольку в общем случае прицельный параметр имеет вид

$$b^2 = \frac{r_{ph}^3(r_{ph} + 2M)}{r_{ph}^2 - \beta r_{ph} + M\beta}, \quad (3.85)$$

$$\beta = \alpha l + 2M.$$

При этом, мы не знаем ничего про радиус фотон сферы, т.к. найти его также не представляется возможным. Однако, мы можем применить метод описанный выше. Представим радиус фотон сферы в виде

$$r_{ph} = r_{ph}^{(0)} + \alpha r_{ph}^{(1)}, \quad (3.86)$$

где $r_{ph}^{(0)} = 3M$. Применим это условие к эффективному потенциалу $V_{eff}(r_{ph}) = 0$, записанному в виде

$$V_{eff} = 0 \rightarrow b^2 F(r) (1 + \alpha G(r)) = 1, \quad (3.87)$$

Где

$$\begin{aligned} F(r) &\equiv \frac{r - 2m}{r^3}, \\ G(r) &\equiv \frac{e^{-\frac{r}{M}} - \frac{l}{r}}{1 - \frac{2M}{r}}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Беря производную от эффективного потенциала и приравнивая получившееся выражение к нулю, мы получим

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = 0 \rightarrow F'(1 + \alpha G) + \alpha F G' = 0, \quad (3.89)$$

Подставляя радиус фотон сферы (3.86) в (3.89) и разлагая по степеням α , придем к выражению

$$F''(r_{ph}^{(0)})\alpha r_{ph}^{(1)} + \alpha G'(r_{ph}^{(0)})F(r_{ph}^{(0)}) = 0 \rightarrow$$

$$r_{ph}^{(1)} = -\frac{G'(r_{ph}^{(0)})F(r_{ph}^{(0)})}{F''(r_{ph}^{(0)})}. \quad (3.90)$$

Для того, чтобы определить влияние дополнительной материи на радиус фотон сферы подставим (3.88) в (3.90). Для этого, выпишем явные выражения

$$F(r_{ph}^{(0)}) = \frac{1}{27M^2},$$

$$F''(r_{ph}^{(0)}) = -\frac{2}{81M^4},$$

$$G'(r_{ph}^{(0)}) = \frac{l}{M^2} - \frac{5}{M}e^{-3}. \quad (3.91)$$

Подставляя эти выражения в (3.90), получим следующий результат

$$r_{ph}^{(1)} = \frac{3l}{2} - \frac{15M}{2}e^{-3}. \quad (3.92)$$

Откуда мы замечаем следующее

- $l = 5Me^{-3} \rightarrow r_{ph}^{(1)} = 0$. Мы приходим к условию (3.82), при котором дополнительная материя не оказывает влияние на радиус фотон сферы.
- $l < 5Me^{-3}$. В этом случае радиус фотон сферы меньше радиуса фотон сферы черной дыры Шварцшильда. Однако, данный случай нарушает сильное энергетическое условие.

Если мы требуем выполнение сильного энергетического условия, то радиус фотон сферы всегда увеличивается при наличии дополнительной материи. Отметим один важный факт, что когда мы говорим про дополнительную материю и ее влияние на тень черной дыры, мы имеем в виду не общий случай, а конкретную метрику Шварцшильда с определенным распределением вещества, которое приводит к минимальным деформациям именно того вида, которые мы рассматриваем в данном параграфе. В общем случае, как мы показали выше, дополнительная материя может приводить как к увеличению, так и к уменьшению радиусов фотон сферы и тени черной дыры.

3.4.2 Тень деформированной черной дыры Рейсснера-Нордстрема

Еще одно решение полученное с помощью метода гравитационного расщепления является обобщением заряженной черной дыры Рейсснера-Нордстрема

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha l}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\alpha M}{r} e^{-\frac{r}{M}}. \quad (3.93)$$

Чтобы удовлетворить доминантным энергетическим условиям, необходимо наложить следующие ограничения на электрический заряд Q

$$Q^2 \geq \frac{\alpha M^2}{e^2}, \quad l \geq \frac{M}{e^2}. \quad (3.94)$$

Чтобы найти радиус фотон сферы, подставим (3.93) в эффективный потенциал и возьмем производную. Получим

$$V'_{eff}(r_{ph}) = 0 \rightarrow \frac{6M + 3\alpha l}{r} - \frac{4Q^2}{r^2} - 2 + \left(\frac{3\alpha M}{r} + \alpha \right) e^{-\frac{r}{M}}. \quad (3.95)$$

В случае, когда черная дыра Рейсснера-Нордстрема не возмущена наличием дополнительной материи $\alpha = 0$, мы имеем

$$\begin{aligned} 2r_{ph} &= 3M + \sqrt{9M^2 - 8Q^2}, \\ b &= \frac{r_{ph}^2}{\sqrt{Mr_{ph} - Q^2}}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Для предыдущей модели, мы показали, что наличие дополнительной материи может не иметь никакого влияния на радиус фотон сферы. Однако, в данном случае, сравнивая радиус фотон сферы в Рейсснере-Нордстреме (3.96) с выражением (3.95), мы легко можем заметить, что получить значение (3.96) не удастся. Тем самым, мы заключаем, что наличие дополнительной материи всегда приводит к изменению радиуса фотон сферы. Теперь найдем прицельный параметр b . Для этого подставим решение (3.95) в эффективный

потенциал

$$\begin{aligned}
\beta &= 3 + \frac{r_{ph}}{M}, \\
\kappa &= \beta(r_{ph}^2 - 2mr_{ph} + Q^2) + \\
&+ 6Mr_{ph} + 3\alpha lr_{ph} - 4Q^2 - 2r_{ph}^2, \\
b &= \frac{\sqrt{\beta} r_{ph}^2}{\sqrt{\kappa}}.
\end{aligned} \tag{3.97}$$

Как и в предыдущем случае, выражение (3.95) слишком громоздко, чтобы анализировать как дополнительная материя влияет на свойства тени. Чтобы оценить это влияние, мы воспользуемся тем же методом, который мы применили в предыдущем случае. Рассмотрим радиус фотон сферы в виде (3.86) и подставим его в эффективный потенциал. Помня, что $V_{eff}(r_{ph}) = 0$, мы можем написать эффективный потенциал в виде (3.87), где

$$\begin{aligned}
r_{ph}^{(0)} &= \frac{1}{2} \left(3M + \sqrt{9M^2 - 8Q^2} \right), \\
F(r) &= \frac{r^2 - 2Mr + Q^2}{r^4}, \\
G(r) &= -\frac{r \left(l + Me^{-\frac{r}{M}} \right)}{r^2 - 2Mr + Q^2}.
\end{aligned} \tag{3.98}$$

Чтобы оценить влияние материи на свойства тени, нам необходимо рассчитать эти функции на фотон сфере

$$\begin{aligned}
F \left(r_{ph}^{(0)} \right) &= \frac{Mr_{ph}^{(0)} - Q^2}{\left(r_{ph}^{(0)} \right)^4}, \\
F'' \left(r_{ph}^{(0)} \right) &= \frac{8Q^2 - 6Mr_{ph}^{(0)}}{\left(r_{ph}^{(0)} \right)^6}, \\
G' \left(r_{ph}^{(0)} \right) &= \frac{3l + 3Me^{-\frac{r_{ph}^{(0)}}{M}} + r_{ph}^{(0)} e^{-\frac{r_{ph}^{(0)}}{M}}}{Mr_{ph}^{(0)} - Q^2},
\end{aligned} \tag{3.99}$$

Подставляя эти результаты в радиус $r_{ph}^{(1)}$ (3.90), мы получим

$$r_{ph}^{(1)} = - \left(r_{ph}^{(0)} \right)^2 \frac{3l + 3Me^{-\frac{r_{ph}^{(0)}}{M}} + r_{ph}^{(0)} e^{-\frac{r_{ph}^{(0)}}{M}}}{8Q^2 - 6Mr_{ph}^{(0)}}. \tag{3.100}$$

Как видно, знак $r_{ph}^{(1)}$ зависит от выражения

$$8Q^2 - 6Mr_{ph}^{(0)} = 8Q^2 - 9M^2 - 3M\sqrt{9M^2 - 8Q^2}. \quad (3.101)$$

Чтобы оценить знак этого выражения, мы введем безразмерный параметр ξ

$$\xi^2 = \frac{Q^2}{M^2}, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (3.102)$$

и запишем (3.101) в виде

$$-9M^2 \left(1 - \frac{8}{9}\xi^2 + \sqrt{1 - \frac{8}{9}\xi^2} \right) < 0. \quad (3.103)$$

Следовательно знак всегда положителен, а это означает, что влияние окружающей черную дыру материи сводится к увеличению радиуса фотон сферы. Более того, радиус фотон сферы может быть равен шварцшильдову значению $3M$, если выполняются условия

$$r = 3M \rightarrow l = \frac{4Q^2}{9\alpha M} - 2e^{-3}. \quad (3.104)$$

Описанные до сих пор методы исследования свойств теней черных дыр подразумевают идеализированную ситуацию, когда источник света находится далеко позади черной дыры и источники света отсутствуют в области между наблюдателем и черной дырой. Реальная астрофизическая дыра окружена аккреционным диском. Учет его влияния на свойства тени были разобраны в предыдущих параграфах, однако, мы не рассматривали случай, когда аккреционный диск сам является источником света. Рассмотрим оптически тонкий, излучающий аккреционный поток окружающий черную дыру. Свет может быть испущен в близи горизонта событий черной дыры, т.е. он может быть испущен в области между горизонтом событий и фотон сферой. Это излучение может повлиять на удельную интенсивность I_{ν_0} , наблюдаемой частоты фотона ν_0 на небе в точке (x, y) . Удельная интенсивность задается формулой [234, 235]

$$I_{\nu_0}(x, y) = \int_{\gamma} G'^3 J(\nu_e) dl_{prop}, \quad (3.105)$$

Где ν_e частота испущенного фотона, $G' = \frac{\nu_0}{\nu_e}$ фактор красного смещения, $J(\nu_e)$ излучательная способность соотнесенную на единицу объема, $dl_{prop} =$

$-K_i u_{(e)}^i d\lambda$ - собственная длина в системе отсчета излучателя, $K^i \equiv \frac{dx^i}{d\lambda}$ - 4-импульс фотона ($K^i K_i = 0$), $u_{(e)}^i$ - 4-скорость излучателя и λ - аффинный параметр. Интегрирование производится по пути фотона γ . Красное смещение G' в терминах 4-импульса $K^i, u_{(0)}^i, u_{(e)}^i$ выражается следующим образом

$$G' = \frac{K_i u_{(0)}^i}{K_j u_{(e)}^j}, \quad (3.106)$$

Где 4-скорость наблюдателя $u^i = \{1, 0, 0, 0\}$. Мы рассматриваем модель газа, который свободно падает на черную дыру по радиальным геодезическим. Его 4-скорость равна

$$\begin{aligned} u_{(e)}^0 &= \frac{1}{f}, \\ u_{(e)}^1 &= -\sqrt{1-f}, \\ u_{(e)}^2 &= u_{(e)}^3 = 0. \end{aligned} \quad (3.107)$$

4-вектор $K^i \equiv \frac{dx^i}{d\lambda}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} K^0 &= \frac{E}{f}, \\ K^1 &= \pm \sqrt{E^2 - f \frac{L^2}{r^2}}, \\ K^2 &= 0, \\ K^3 &= \frac{L^2}{r^2}. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Знак K^1 зависит от движения фотона: он положителен в случае движения от черной дыры и отрицателен в случае падения. Подставляя (3.108) и (3.107) в (3.106), найдем красное смещение в виде

$$G' = \frac{K_0 f}{K_0 - f K_1 \sqrt{1-f}}. \quad (3.109)$$

Для удельной излучательной способности J , мы предполагаем следующую простую модель, в которой излучение монохромно с частотой излучения ν^* и профиль излучения есть $\frac{1}{r^2}$

$$J(\nu_e) \propto \frac{\delta(\nu_e - \nu^*)}{r^2}. \quad (3.110)$$

Собственную длину dl_{prop} , можно записать в виде

$$dl_{prop} = -\frac{-K_0}{G'K^1} dr. \quad (3.111)$$

Собирая теперь вместе выражения (3.106), (3.110) и (3.111) и подставляя их в (3.105), производя интегрирование по всем наблюдаемым частотам, мы найдем наблюдаемую интенсивность

$$I_o(x, y) \sim -\int_{\gamma} \frac{G'^3 K_0}{r^2 K^1} dr. \quad (3.112)$$

Как мы показали, радиус фотонной сферы увеличивается при наличии окружающей материи, как следствие это приводит к уменьшению удельной интенсивности, как показано на рисунке 3.4. Рассмотрим теперь случай аккреционного диска. При этом мы будем исходить из того, что аккреционный диск окружает черную дыру и мы не будем учитывать его влияние на пространство-время. При рассмотрении же его влияния на тень черной дыры, мы будем исходить из свойств плазмы и распространение света в ней. Мы рассмотрим модель холодной, бесстолкновительной ненамагниченной плазмы. В отсутствие давления, частицы движутся вдоль времени-подобных геодезических, для которых должно выполняться условие $g_{ik}u^i u^k = -1$. Для того, чтобы оценить влияние этой плазмы на тень черной дыры, мы должны рассчитать плазменную частоту ω_p , которая зависит от плотности. Рассмотрим уравнение непрерывности

$$\left(\sqrt{-g}\rho u_{(p)}^i\right)_{,i} = 0. \quad (3.113)$$

Где $g = \det g_{ik}$ и $u_{(p)}^i$ - 4-скорость частиц. Для простоты расчетов, мы предположим что 4-скорости протона и электрона совпадают. Плазма состоит из нейтральных атомов водорода. Мы также пренебрежем массой электрона m_e по сравнению с массой протона m_p . Таким образом, плотность плазмы ρ может быть написана в виде

$$\rho \sim m_p N. \quad (3.114)$$

Где N плотность числа протонов. Мы предположим, что все движение происходит в экваториальной плоскости $\theta = \frac{\pi}{2}$. Уравнение непрерывности можно

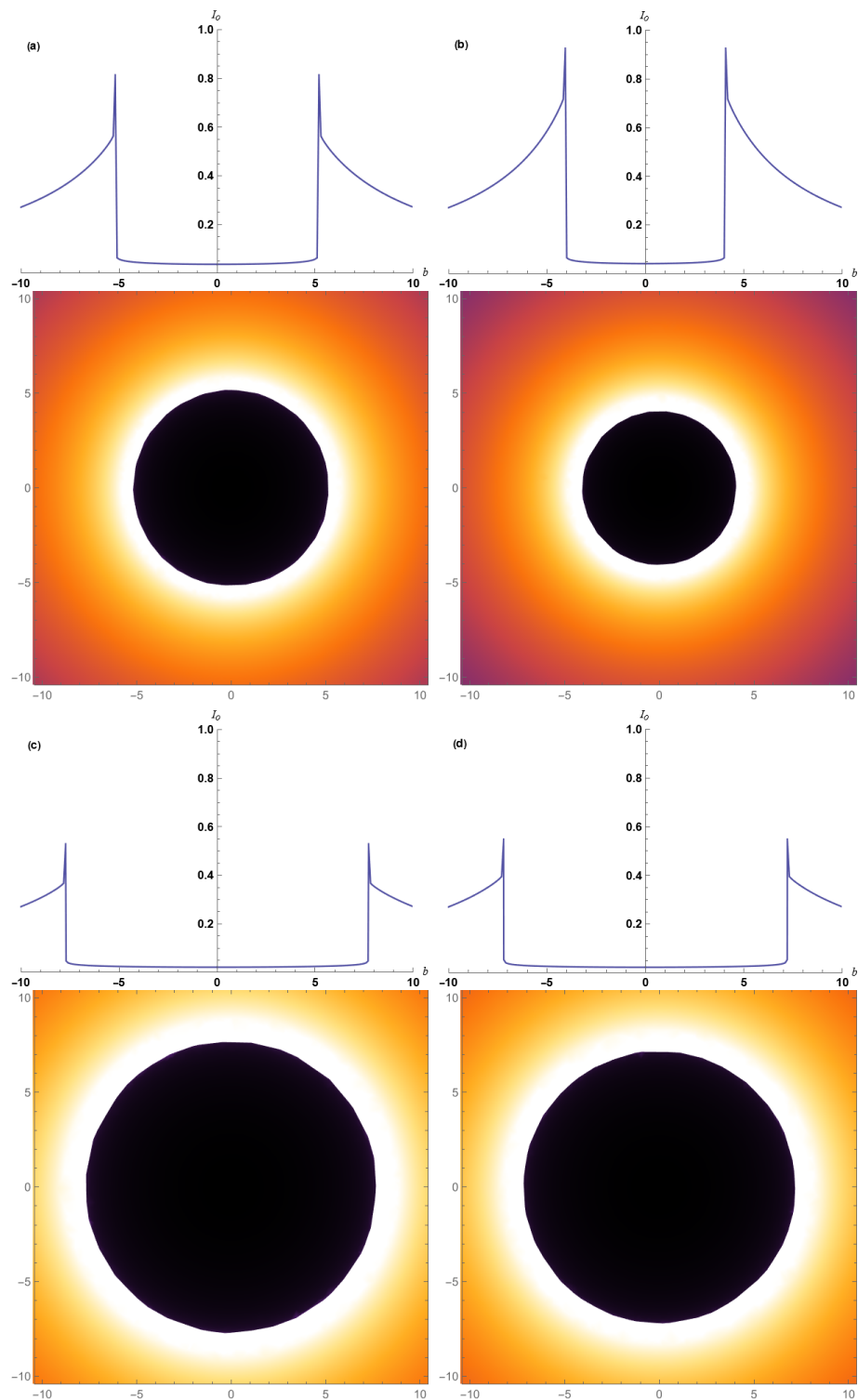


Рисунок 3.4: На графиках изображены распределения наблюдаемой интенсивности как функции прицельного параметра b при $M = 1$. Верхний график показывает распределение интенсивности, а нижний график показывает изображение области тонкого оптического излучения. График (a) демонстрирует функцию I_0 зависящую от прицельного параметра b для случая черной дыры Шварцшильда. График (b) демонстрирует тоже поведение интенсивности для черной дыры Рейсснера-Нордстрема с $Q = 0.98$. Изображение (c) демонстрирует интенсивность на случай черной дыры Шварцшильда деформированной наличием материи $\alpha = 0.5$ и $l = 2$. График (d) показывает интенсивность для черной дыры

теперь записать в виде

$$(r^2 \rho u^1)_{,r} = 0. \quad (3.115)$$

Интегрируя, получаем

$$4\pi r^2 u^1 = -\dot{m} = const., \quad (3.116)$$

Мы предполагаем, что частицы начинают свое движение из состояния покоя на бесконечности. Для подобных частиц $E = 1$, тогда u^1 можно записать в виде

$$u^1 = -\sqrt{1-f}. \quad (3.117)$$

Плотность плазмы ρ можно выразить через плазменную частоту ω_p и частоту фотона ω_0 , в виде

$$\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} = \frac{4\pi e^2 N}{m_e \omega_0^2} = \frac{4\pi e^2 \rho}{m_p m_e \omega_0^2} = \beta_0 \frac{1}{r^2 \sqrt{1-f}}, \quad (3.118)$$

где

$$\beta_0 = \frac{e^2 \dot{m}}{m_e m_p \omega_0^2}. \quad (3.119)$$

Мы рассматриваем модель в которой плотность плазмы мала. Это означает, что $\omega_p \ll \omega_0$. В этом случае, угловой размер (θ_{sh}) тени черной дыры наблюдаемый на расстоянии r_o есть

$$\sin^2 \theta_{sh} \approx \frac{r_{ph}^2}{(r_o^{(0)})^2} \frac{f(r_o)}{f(r_{ph}^{(0)})} \left(1 - \beta_0 f(r_{ph}^{(0)}) \times \right. \\ \left. \sqrt{1-f(r_{ph}^{(0)})} + \beta_0 f(r_o) \sqrt{1-f(r_o)} \right). \quad (3.120)$$

Где $r_{ph}^{(0)}$ радиус фотон сферы в отсутствии плазмы. Мы оценим влияние плазмы численно. Для этого перепишем все выражения в сгс системе. Имеем

$$\beta_0 = \frac{e^2 \dot{m} c^3}{\sqrt{2GM} (GM)^{3/2} m_e m_p \omega_0^2}. \quad (3.121)$$

Темп аккреции \dot{M} может быть выражен через наблюдаемую светимость в виде

$$\lambda \sim \eta \dot{m} c^2, \quad (3.122)$$

Где η безразмерная величина связанная с эффективностью аккреции. Частота фотона связана с длиной волны λ_0 соотношением

$$\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0}. \quad (3.123)$$

Мы рассмотрим две модели $\eta = 10^{-4}$ и $\eta = 0.1$ [236–238]. Мы также рассмотрим две сверхмассивные черные дыры Стрелец A^* и $M87$.

$$\begin{aligned} \text{Sgr } A^* \quad , \quad M &= 4.3 \times 10^6 M_\odot , \\ & r_o = 8.3 \text{ Kpc} , \\ \text{M87}^* \quad , \quad M &= 3 \times 10^9 M_\odot , \\ & r_o = 18 \text{ Mpc} , \\ \lambda &= 10^6 \lambda_\odot , \lambda_0 = 1 \text{ mm} , \lambda_0 = 10 \text{ cm} , \end{aligned} \quad (3.124)$$

Учет плазмы на свойства тени черной дыры отображен в таблицах 3.2 3.3,

3.5 Метод расчета тени в случае асимптотически-плоского пространства-времени

В предыдущих параграфах мы рассмотрели влияние деформаций на свойства тени чёрной дыры. Однако зачастую решение, описывающее чёрную дыру, имеет крайне сложный вид, и аналитически выявить влияние дополнительных параметров не удаётся. Тем не менее, можно сравнить влияние этих параметров на размеры тени по сравнению с тенью чёрной дыры Шварцшильда. Важно отметить, что приводимый здесь метод не предназначен для

Таблица 3.2: В таблице приведены значения углового размера тени черной дыры Sgr A^* для случая различных значений α и l . Верхняя часть - черная дыра Шварцшильда, средняя соответствует Рейсснеру-Нордстрему с $Q = 0.1$, а нижняя часть соответствует заряду $Q = 0.9$. . Размерность величин приведена в микросекундах.

+

Шварцшильд	$l = 0.5$	$l = 1$	$l = 1.5$
$\alpha = 0.01$	26.618	26.685	26.751
$\alpha = 0.1$	27.044	27.718	28.391
$\alpha = 0.5$	29.052	32.583	36.066

РН $Q = 0.1$	$l = 0.5$	$l = 1$	$l = 1.5$
$\alpha = 0.01$	26.601	26.667	26.734
$\alpha = 0.1$	27.254	27.915	28.576
$\alpha = 0.5$	30.074	33.332	36.61

РН $Q = 0.9$	$l = 0.5$	$l = 1$	$l = 1.5$
$\alpha = 0.01$	22.190	22.274	22.359
$\alpha = 0.1$	23.078	23.887	24.684
$\alpha = 0.5$	26.594	30.248	33.839

расчёта тени произвольной чёрной дыры; он позволяет лишь оценить, как тень произвольной чёрной дыры соотносится с тенью чёрной дыры Шварцшильда.

Как обычно, рассмотрим метрику сферически-симметричного пространства-времени в виде:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (3.125)$$

Предположим, что пространство-время (3.125) асимптотически плоское, то есть:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 1. \quad (3.126)$$

Таблица 3.3: В таблице приведены данные углового размера тени черной дыры Sgr A* в случае различных параметров η и λ_0 . Верхняя строка соответствует черной дыре Шварцшильда, средняя - Рейсснеру-Нордстрему с $Q = 0.1$, а нижняя часть $Q = 0.9$. Значения в таблице показывают, что значительное влияние на тень черной дыры может быть оказана только в случае больших длин волн $\lambda \sim 10\text{см.}$. В остальных случаях, влияние плазмы пренебрежимо мало. Размерность приведенных величин - микросекунды

Шварцшильд	$\eta = 10^{-4}$	$\eta = 0.1$
$\lambda_0 = 10$	22.4	26.568
$\lambda_0 = 0.1$	26.571	26.572
<hr/>		
РН $Q = 0.1$	$\eta = 10^{-4}$	$\eta = 0.1$
$\lambda_0 = 10$	22.367	26.524
$\lambda_0 = 0.1$	26.527	26.527
<hr/>		
РН $Q = 0.9$	$\eta = 10^{-4}$	$\eta = 0.1$
$\lambda_0 = 10$	19.077	22.085
$\lambda_0 = 0.1$	22.087	22.087

В этом случае функцию $f(r)$ можно разложить в ряд по степеням $1/r$:

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \sum_{i=2}^n \frac{\alpha_i}{r^i} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{n+1}}\right). \quad (3.127)$$

Здесь параметр M соответствует массе чёрной дыры в пределе Шварцшильда. Коэффициенты α_i характеризуют отклонение метрики от шварцшильдова решения и определяются дополнительными параметрами теории (зарядом, скалярными полями и т.д.).

Для расчёта тени чёрной дыры воспользуемся выражением для эффективного потенциала, определяющего радиальное движение вдоль светоподобных геодезических:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V_{\text{eff}}(r) = 0, \quad (3.128)$$

где

$$V_{\text{eff}}(r) = f(r) \frac{L^2}{r^2} - E^2. \quad (3.129)$$

Напомним, что радиус фотон сферы определяется из условия равенства нулю производной эффективного потенциала:

$$\left. \frac{dV_{\text{eff}}}{dr} \right|_{r=r_{ph}} = 0. \quad (3.130)$$

Воспользуемся этим условием для функции $f(r)$ в виде разложения (3.127).

$$2r^n - 6Mr^{n-1} + \sum_{i=2}^n (i+2)\alpha_i r^{n-i} = 0. \quad (3.131)$$

Это алгебраическое уравнение, в общем случае, содержит n корней. В виду того, что пространство-время асимптотически плоское мы ограничим наше дальнейшее рассмотрение максимальным корнем. Этот максимальный корень, должен иметь незначительные отклонения от радиуса фотон сферы черной дыры Шварцшильда $r_1 = 3M$. Следовательно, мы можем предположить, что радиус фотон сферы имеет вид

$$r_{ph} = r_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i r_i + \mathcal{O}(\alpha_{n+1}) \quad (3.132)$$

Подставляя это условие в уравнение (3.131) и разлагая это выражение в ряд по степеням α_i , мы получим следующие соотношения для отклонений r_i

$$r_i = -\frac{i+2}{6M(3M)^{i-2}} \quad (3.133)$$

Как видно из этого выражения, радиус фотон сферы имеет большее или меньшее значение по сравнению с радиусом фотон сферы черной дыры Шварцшильда, если α_i отрицательно или положительно соответственно. Для положительных α_i мы имеем уменьшение радиуса фотон сферы, как это имеет место для случая заряженной черной дыры Рейсснера-Нордстрема. Для отрицательных же α_i радиус фотон сферы увеличивается. Подставляя радиус фотон сферы в эффективный потенциал, приравнивая его к нулю и выражая прицельный параметр b , мы приходим к соотношению

$$b = \frac{r_{ph}}{\sqrt{f(r_{ph})}}. \quad (3.134)$$

Радиус фотон сферы определяется из уравнения

$$f'r - 2f = 0. \quad (3.135)$$

Используя это соотношение, перепишем прицельный параметр (3.134) в виде

$$b = \sqrt{\frac{2r_{ph}}{f'}}. \quad (3.136)$$

Подставляя в эту формулу радиус фотон сферы в виде (3.133) и разлагая это выражение по степеням α_i , мы приходим к выражению

$$b = b_0 + b'(3m) \sum_{i=2}^n \alpha_i r_i. \quad (3.137)$$

Где b_0 значение прицельного параметра в случае черной дыры Шварцшильда

$$b_0 = 3\sqrt{3}M. \quad (3.138)$$

Производная от прицельного параметра, может быть записана в виде

$$\begin{aligned} b' &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{f'}{2r_{ph}} \frac{2f' - 2r_{ph}f''}{f'^2}} \Big|_{r_{ph}=3M} \\ &= \frac{1}{2b_0} \frac{2 - b_0^2 f''}{f'} \Big|_{r_{ph}=3M}. \end{aligned} \quad (3.139)$$

Подставляя значения производных функций $f(r)$ посчитанные на фотон сфере черной дыры Шварцшильда

$$\begin{aligned} f'(3M) &= \frac{2}{9M}, \\ f''(3M) &= -\frac{4}{27M^2}, \end{aligned} \quad (3.140)$$

и подставляя это все в формулы (3.137) и (3.139), мы получаем

$$b = 3\sqrt{3}M + \frac{3\sqrt{3}M}{2} \sum_{i=2}^n \alpha_i r_i = 3\sqrt{3}M \left(1 - \sum_{i=2}^n \frac{i+2}{12M(3m)^{i-2}} \right). \quad (3.141)$$

Заметим, что α_i и r_i имеют разные знаки. Следовательно, мы можем заключить, что если α_i увеличивает радиус фотон сферы, то этот параметр увеличивает и тень черной дыры. Тоже самое происходит и для положительных α_i , т.е. уменьшая радиус фотон сферы, уменьшается и тень черной дыры.

3.6 Изменение тени черной дыры при изменении массы

В процессе аккреции масса чёрной дыры изменяется. Следовательно, метрика, описывающая пространство-время, в общем случае должна быть динамической. Однако аналитически рассчитать тень динамической чёрной дыры затруднительно, поскольку в отсутствие времени-подобного вектора Киллинга энергия фотона не сохраняется, а значит, редукция уравнений движения второго порядка к уравнениям первого порядка, как правило, становится невозможной. Тем не менее, можно оценить, как изменяется тень чёрной дыры при изменении её массы, если предположить, что в начальный и конечный моменты времени пространство-время является статическим.

Запишем квадрат интервала для сферически-симметричного пространства-времени в координатах Эддингтона–Финкельштейна $\{v, r, \theta, \varphi\}$:

$$ds^2 = -f(r)dv^2 + 2dv dr + r^2 d\Omega^2, \quad (3.142)$$

где

$$f(r) = 1 - \frac{2M(r)}{r}. \quad (3.143)$$

В общем случае источником такого гравитационного поля является анизотропный тензор энергии-импульса:

$$\rho = -T^0_0 = T^1_1 = \frac{2M'}{r^2}, \quad (3.144a)$$

$$P = T^2_2 = T^3_3 = -\frac{M''}{r}. \quad (3.144b)$$

Здесь ρ — плотность энергии, P — давление в тангенциальных направлениях.

Воспользовавшись выражением для эффективного потенциала вдоль светоподобных геодезических:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V_{\text{eff}} = 0, \quad (3.145)$$

где

$$V_{\text{eff}} = E^2 - \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right) \frac{L^2}{r^2}, \quad (3.146)$$

мы можем найти уравнение, определяющее радиус фотон сферы. Условие $\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = 0$ приводит к:

$$3M - M'r - r = 0. \quad (3.147)$$

Теперь рассмотрим, как изменяется радиус фотон сферы при малом изменении массовой функции. Введём бесконечно малый параметр $\alpha \ll 1$, и предположим, что масса изменяется как $M \rightarrow M + \alpha M$, здесь $\alpha > 0$ соответствует аккреции вещества, а $\alpha < 0$ — потере массы (например, при испарении чёрной дыры по Хокингу).

Для оценки изменения радиуса фотон сферы запишем эффективный потенциал (3.145) в виде:

$$V_{\text{eff}} = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2\alpha M}{r - 2M}\right). \quad (3.148)$$

Для упрощения последующих расчетов, мы введем две функции

$$\begin{aligned} F(r) &\equiv -\frac{r - 2M}{r^3}, \\ G(r) &\equiv \frac{2M}{r - 2M}. \end{aligned} \quad (3.149)$$

Тогда производная от эффективного потенциала, приравненная к нулю, приводит к уравнению

$$F'(1 - \alpha G) - \alpha G' F = 0. \quad (3.150)$$

Теперь, мы предположим, что радиус фотон сферы задается формулой

$$r_{ph} = r_0 + \alpha r_1, \quad (3.151)$$

Где r_0 - радиус фотон сферы до начала процесса аккреции или испарения. Подставляя (3.151) в (3.150) и разлагая в ряд Тейлора по степеням α , мы приходим к выражению

$$r_1 = \frac{F(r_0)G'(r_0)}{F''(r_0)}. \quad (3.152)$$

Подставляя (3.149) в уравнение (3.152) и оценивая получившееся выражение на фотон сфере r_0 , мы получим

$$r_1 = \frac{r_0}{1 - 2M'(r_0) + M''(r_0)r_0}. \quad (3.153)$$

Доминантные энергетические условия требуют, чтобы материя двигалась по не пространственно-подобным геодезическим, т.е. со скоростями, не превышающими скорость света в вакууме, что выливается в условие $\rho \geq |P|$. Воспользовавшись уравнением (3.144), мы можем написать $2M' \geq |-M''r|$, что при подстановке в знаменатель (3.153), даёт нам знаменатель в виде $1 - 4M'$. Из уравнения (3.147), мы знаем, что $M' = \frac{3M}{r_0} - 1$. Тогда знаменатель (3.153) даёт выражение $5 - \frac{12M(r_0)}{r_0}$. Известный факт состоит в том, что радиус фотон сферы подчиняется следующему условию $\frac{3}{2}r_h$, где r_h соответствует расположению горизонта событий $r_h = 2M(r_h)$. Подставляя это в (3.153) и учитывая тот факт, что $\frac{2M}{r_h} \leq 1$, мы найдём, что знаменатель (3.153) меньше единицы, что позволяет нам заключить, что r_1 всегда положительно, а следовательно увеличение массы чёрной дыры приводит к увеличению радиуса фотон сферы и видимого углового размера чёрной дыры.

Поэтому мы можем сделать следующее утверждение: в процессе аккреции, если масса чёрной дыры увеличивается, то увеличивается и тень чёрной дыры; и наоборот: если в процессе испарения масса чёрной дыры уменьшается, то же самое происходит и с тенью чёрной дыры.

Однако, говоря о массе чёрной дыры, мы имели в виду массовую функцию, которая, вообще говоря, зависит от множества параметров, включая непосредственно массу чёрной дыры. Например, чёрная дыра Рейсснера–Нордстрема зависит от двух параметров — массы чёрной дыры и электрического заряда. Однако может случиться так, что при увеличении массы чёрной дыры и электрического заряда радиус фотон сферы при этом уменьшается. Покажем это явно. Массовая функция пространства-времени Рейсснера–Нордстрема задаётся выражением

$$M(r, m, Q) = m - \frac{Q^2}{2r}. \quad (3.154)$$

Рассмотрим процесс аккреции, при котором у чёрной дыры меняются масса и заряд и становятся равными $M + \alpha M$ и $Q + \beta Q$, где $\alpha \ll 1$ и $\beta \ll 1$. Подставляя эти изменения в массовую функцию (3.154) и разлагая в ряд Тейлора по степеням α и β , получаем

$$M(r, m + \alpha m, Q + \beta Q) \approx m + \alpha \frac{\partial M(r, m, Q)}{\partial m} + \beta \frac{\partial M(r, m, Q)}{\partial Q}. \quad (3.155)$$

Подбирая значения α , β , M и Q , мы можем сделать последние два члена отрицательными. Это означает, что, увеличивая массу чёрной дыры, мы тем временем уменьшили массовую функцию. Последнее же означает, как мы доказали выше, что тень и радиус фотон сферы уменьшаются.

Логично предположить, что изменение тени чёрной дыры связано с эволюцией горизонта видимости. И если горизонт уменьшается, это должно, в свою очередь, приводить к уменьшению тени чёрной дыры, и наоборот. Как мы уже знаем, поведение горизонта видимости полностью определяется светоподобными энергетическими условиями. Докажем, что аналогичное поведение определяет и эволюцию тени чёрной дыры.

Как мы уже упоминали, в процессе аккреции и испарения пространство-время, описывающее чёрную дыру, должно быть динамическим. Мы можем записать его в виде:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M(v, r)}{r} \right) dv^2 + 2\varepsilon dv dr + r^2 d\Omega^2. \quad (3.156)$$

Как известно, изменение массы со временем отвечает за поток энергии, который описывается компонентой T_1^0 тензора энергии-импульса, которую можно записать в виде:

$$T_0^1 = 2\varepsilon \frac{\dot{M}}{r^2}. \quad (3.157)$$

Для выполнения светоподобного энергетического условия необходимо потребовать, чтобы этот поток был неположительным в направлении входящих геодезических, что эквивалентно условию $\dot{M} \geq 0$ для аккреции ($\varepsilon = +1$) и $\dot{M} \leq 0$ для испарения ($\varepsilon = -1$). Однако массовая функция зависит от параметров чёрной дыры, которые изменяются со временем. Для простоты предположим, что таких параметров два, и обозначим их $M(v)$ и $Q(v)$.

Рассмотрим аккреционный процесс, для которого $\varepsilon = +1$. В этом случае получаем:

$$\dot{M} = \frac{\partial M(r, M(v), Q(v))}{\partial m} \frac{dM(v)}{dv} + \frac{\partial M(r, M(v), Q(v))}{\partial Q} \frac{dQ(v)}{dv}. \quad (3.158)$$

Сравнивая это выражение с уравнением (3.155), находим:

$$\alpha = \frac{dM(v)}{dv}, \quad \beta = \frac{dQ(v)}{dv}. \quad (3.159)$$

Если массовая функция уменьшается, это означает, что $\dot{M} < 0$, что нарушает светоподобные энергетические условия. Легко убедиться, что эти рассуждения применимы к произвольному числу параметров, описывающих чёрную дыру. Полученные результаты можно сформулировать в виде теоремы:

Теорема. Если масса чёрной дыры увеличивается и светоподобные энергетические условия выполняются, то размеры тени чёрной дыры также увеличиваются.

Мы уже привели пример чёрной дыры Рейсснера–Нордстрема. Приведём теперь рассмотренный нами ранее пример чёрной дыры Шварцшильда с минимальными геометрическими деформациями. Напомним, что

$$M(r) = m + \frac{\bar{\alpha}l}{2} - \frac{\bar{\alpha}r}{2} e^{-\frac{r}{M}}. \quad (3.160)$$

Рассмотрим изменение массы чёрной дыры m и параметра l в виде:

$$\begin{aligned} m &\rightarrow m + \varepsilon m, & \varepsilon &\ll 1, & \varepsilon &> 0, \\ l &\rightarrow l + \beta l, & \beta &\ll 1, & \beta &> 0. \end{aligned} \quad (3.161)$$

Мы можем записать массовую функцию до первого порядка малости в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(r) &= \frac{\bar{\alpha}\beta l}{2} + \frac{\bar{\alpha}l}{2} - \frac{1}{2}\bar{\alpha}r e^{-\frac{r}{m}} + m \\ &+ \varepsilon \left(m - \frac{\bar{\alpha}r^2 e^{-\frac{r}{m}}}{2m} \right) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (3.162)$$

и

$$\mathcal{M}(r) < M(r) + \frac{\bar{\alpha}\beta l}{2} + \varepsilon \left(m - \frac{\bar{\alpha}r^2 e^{-\frac{r}{m}}}{2m} \right) + O(\varepsilon^2). \quad (3.163)$$

Как мы видим, при определённых условиях новая массовая функция $\mathcal{M}(r)$ может быть меньше исходной $M(r)$, что означает: несмотря на увеличение массы чёрной дыры, тень чёрной дыры уменьшается.

Ещё одним примером может служить чёрная дыра Киселёва, для которой

$$f(r) = 1 - \frac{2M(r)}{r}, \quad (3.164)$$

и

$$M(r) = m + \frac{N}{2r^{3\omega}}. \quad (3.165)$$

Рассмотрим изменение параметров массы и N для положительного значения параметра уравнения состояния ω

$$\begin{aligned} m &\rightarrow m + \varepsilon m, \quad \varepsilon \ll 1, \quad \varepsilon > 0, \\ N &\rightarrow N + \beta N, \quad \beta \ll 1, \quad \beta > 0. \end{aligned} \quad (3.166)$$

В этом случае $M(r) \rightarrow \mathcal{M}(r)$ и

$$\mathcal{M}(r) = m + m\varepsilon + \frac{1}{2}\beta N r^{-3\omega} + \frac{1}{2}N r^{-3\omega} \quad (3.167)$$

И мы можем написать

$$\mathcal{M}(r) < M(r) + m\varepsilon + \frac{1}{2}\beta N r^{-3\omega}. \quad (3.168)$$

С отрицательным значением параметра N , что необходимо для выполнения слабых энергетических условий, мы можем всегда найти такие значения параметров ε и β , что $\mathcal{M}(r) < M(r)$.

3.7 Тень динамической черной дыры Бонора-Вайдья

Реальные чёрные дыры окружены аккреционным диском, а потому в процессе аккреции они приобретают массу либо теряют её в процес-

сах излучения, подобных излучению Хокинга. Все это указывает на то, что пространство-время, описывающее эти компактные объекты, должно быть динамическим. Построение тени динамической чёрной дыры становится крайне затруднительным вследствие отсутствия времени-подобного вектора Киллинга, что, в свою очередь, ведёт к несохранению энергии вдоль светоподобных геодезических. В общем случае динамическое сферически-симметричное пространство-время допускает лишь одну сохраняющуюся величину — удельный момент количества движения L . Этот факт делает невозможной редукцию уравнений движения второго порядка к уравнениям первого порядка. Как следствие, аналитическое построение тени динамической чёрной дыры становится невозможным в описанном выше формализме.

Для того чтобы свести уравнения движения второго порядка к уравнениям первого порядка, необходимо выявить дополнительные симметрии пространства-времени. В случае, если пространство-время допускает конформный или гомотетичный векторы Киллинга, появляется возможность ввести дополнительную сохраняющуюся величину, связанную с энергией частицы, вдоль светоподобных, а иногда и вдоль времени-подобных геодезических.

Прежде чем переходить к построению теней динамических чёрных дыр, зададимся вопросом о том, при каких условиях динамическое сферически-симметричное пространство-время вида

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M(v, r)}{r} \right) dv^2 + 2dv dr + r^2 d\Omega^2, \quad (3.169)$$

допускает существование конформного вектора Киллинга.

Определение. Пространство-время допускает существование конформного вектора Киллинга, если существует такой вектор K^i , который удовлетворяет уравнению

$$K_{i;k} + K_{k;i} = c(x^l)g_{ik}, \quad (3.170)$$

где $c(x^l)$ — произвольная функция координат. Если вектор K^i удовлетворяет этому уравнению, то:

- вектор K^i называется вектором Киллинга, если $c(x^l) \equiv 0$;
- вектор K^i называется гомотетичным вектором Киллинга, если $c(x^l) = \text{const} \neq 0$;

- вектор K^i называется конформным вектором Киллинга, если $c(x^l)$ — произвольная не постоянная функция координат.

Метрика Вайдья допускает существование только гомотетичного вектора Киллинга и не допускает существование конформного вектора Киллинга. Для наших целей достаточно найти гомотетичный вектор Киллинга для метрики (3.169).

Рассмотрим вектор

$$\mathbf{K} = v \frac{d}{dv} + r \frac{d}{dr}. \quad (3.171)$$

Вектор K^i (3.171) является гомотетичным вектором Киллинга, если он удовлетворяет уравнению (3.170) с $c(x^l) \equiv \text{const}$. Подставляя (3.171) в (3.170), мы приходим к тому, что K^i — гомотетичный вектор Киллинга, если существует решение следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{\dot{M}v}{r} - \frac{M}{r} + M' = 0 \quad (3.172)$$

Решением этого уравнения является

$$M(r, v) = \nu r^\xi v^{1-\xi} + \mu v. \quad (3.173)$$

Здесь μ, ν и ξ - некоторые константы. Заметим, что массовая функция вида (3.173) является частным случаем решения Хусейна.

Мы построим аналитическую модель динамической чёрной дыры в случае, когда внешняя геометрия описывается метрикой Вайдья и метрикой Бонора–Вайдья (заряженный Вайдья).

Начнём с рассмотрения метрики Вайдья, которая в координатах Эддингтона–Финкельштейна имеет вид:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -f(v, r)dv^2 + 2dv dr + r^2 d\Omega^2, \\ f(v, r) &= 1 - \frac{2M(v)}{r}. \end{aligned} \quad (3.174)$$

Как видно из вида массовой функции, метрика Вайдья допускает гомотетичный вектор Киллинга, если массовая функция имеет вид:

$$M(v) = \mu v, \quad (3.175)$$

где μ — произвольная положительная константа.

Перейдём от координат $\{v, r\}$ к координатам $\{t, R\}$, воспользовавшись следующим координатным преобразованием:

$$\begin{aligned} v &= r_0 e^{\frac{t}{r_0}}, \\ r &= R e^{\frac{t}{r_0}}, \end{aligned} \quad (3.176)$$

где t и R играют роль временной и пространственной координат, а r_0 — произвольная константа размерности длины.

После преобразования метрика Вайдья принимает вид:

$$ds^2 = e^{\frac{2t}{r_0}} d\tilde{s}^2, \quad (3.177)$$

где

$$d\tilde{s}^2 = - \left(1 - \frac{2\mu r_0}{R} - \frac{2R}{r_0} \right) dt^2 + 2dR dt + R^2 d\Omega^2. \quad (3.178)$$

Заметим, что эта метрика является частным случаем чёрной дыры Киселёва. Метрика (3.178) не является асимптотически плоской. Она допускает существование двух горизонтов: один описывает горизонт событий чёрной дыры, другой — внешний горизонт, аналогичный космологическому. Область между этими горизонтами называется областью внешнего взаимодействия. В этой области гомотетичный вектор Киллинга $\partial/\partial t$ является времени-подобным. Область внешнего взаимодействия определяется условием $R_- < R < R_+$, где

$$R_{\pm} = \frac{r_0}{4} \left(1 \pm \sqrt{1 - 16\mu} \right). \quad (3.179)$$

Ключевым моментом является тот факт, что в области внешнего взаимодействия с помощью гомотетичного вектора Киллинга можно ввести константу движения вдоль светоподобных геодезических, отличную от момента количества движения в экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$:

$$L = R^2 \frac{d\varphi}{d\lambda}. \quad (3.180)$$

Эта константа связана с энергией фотона и определяется выражением:

$$E = e^{\frac{2t}{r_0}} \left[\left(1 - \frac{2\mu r_0}{R} - \frac{2R}{r_0} \right) \frac{dt}{d\lambda} - \frac{dR}{d\lambda} \right]. \quad (3.181)$$

Воспользовавшись двумя константами движения в экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$ и условием, которому подчиняются светоподобные геодезические $g_{ik}u^i u^k = 0$, найдём радиальную компоненту 4-скорости:

$$\left(\frac{dR}{d\lambda}\right)^2 + V_{\text{eff}} = E^2, \quad (3.182)$$

где эффективный потенциал имеет вид:

$$V_{\text{eff}} = \left(1 - \frac{2\mu r_0}{R} - 2\frac{R}{r_0}\right) \frac{L^2}{R^2}. \quad (3.183)$$

Теперь мы можем определить тень чёрной дыры, которую может видеть наблюдатель, движущийся вдоль линий $t = \text{const}$ в области внешнего взаимодействия. Для этого необходимо найти радиус фотон сферы R_{ph} . Возьмём производную от эффективного потенциала и приравняем её к нулю. Тогда решением будут два радиуса:

$$R_{ph}^{\pm} = \frac{r_0}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 12\mu}\right). \quad (3.184)$$

Отметим, что R_{ph}^+ ведет к тому, что прицельный параметр b принимает отрицательные значения, а следовательно тени не формирует. Поэтому, дальнейшее обсуждение будет касаться только случая R_{ph}^- . Заметим, что R_{ph}^- переходит в радиус фотон сферы Шварцшильда $R_{ph} = 3M$ при малых значениях параметра μ

$$R_{ph}^- = 3r_0\mu + O(\mu^2). \quad (3.185)$$

Делая переход к старым координатам $\{r, v\}$, мы получаем

$$r_{ph} = 3\mu v = 3M(v), \quad \mu \ll 1. \quad (3.186)$$

Подставляем теперь значение радиуса фотон сферы R_{ph}^- в эффективный потенциал, приравниваем его к нулю и, разрешая относительно прицельного параметра b , приходим к выражению

$$b_V = \sqrt{\frac{R_{ph}^-}{4\mu r_0 - R_{ph}^-} R_{ph}^-}, \quad (3.187)$$

Где индекс v означает прицельный параметр в пространстве-времени Вайдья. Заметим, что если мы подставим приближенное значение радиуса фотон

сферы $R_{ph}^- \approx 3\mu r_0$ в уравнение (3.187), то получим значение прицельного параметра $b_V \approx 3\sqrt{3}\mu r_0$, совпадающее со значением прицельного параметра в метрике Шварцшильда.

Угловой размер тени видимый наблюдателем при $R = R_o$ имеет вид

$$\sin^2 \omega_{sh} = \frac{b_V^2 \left(R_o - 2\mu r_0 - \frac{2}{r_0} R_o \right)}{R_o^3}. \quad (3.188)$$

Отметим, что угловой размер тени черной дыры стремится к нулю когда положение наблюдателя стремится к одному из конформных горизонтов Киллинга $R_o \rightarrow R_{\pm} \rightarrow \sin^2 \omega_{sh} \rightarrow 0$. Когда положение наблюдателя совпадает с радиусом фотон сферы $R_o = R_{ph}^-$, то угловой размер тени, согласно (3.188), стремится к единице $\sin^2 \omega_{sh} = 1$. Откуда мы можем заключить, что угловой размер тени находится в пределах $0 \leq \omega_{sh} \leq \frac{\pi}{2}$ когда наблюдатель располагается между фотон сферой и внешним конформным горизонтом Киллинга $R_{ph}^- \leq R_o \leq R_+$. Когда же наблюдатель располагается между горизонтом событий черной дыры и фотон сферой $R_- \leq R_o \leq R_{ph}^-$, то угловой размер тени варьируется в пределах $\frac{\pi}{2} \leq \omega_{sh} \leq \pi$. Мы можем различать следующие случаи

- Наблюдатель располагается близко к внешнему конформному горизонту Киллинга $R_o \rightarrow R_+$: в этом случае, угловой размер тени черной дыры $\omega_{sh} \rightarrow 0$, т.е. наблюдатель видит яркое небо В координатах $\{v, r\}$ это положение соответствует

$$r_o = \frac{v}{4} \left(1 + \sqrt{1 - 16\mu} \right) \approx \frac{v}{2} - 2\mu v = \frac{v}{2} - r_{ah}(v) > 0, \quad (3.189)$$

где $r_{ah} = 2\mu v$ расположение кажущегося горизонта.

- $R_o = R_{ph}^-$: В этом случае, наблюдатель видит половину неба $\omega_{sh} = \frac{\pi}{2}$. В старых координатах $\{v, r\}$ это соответствует положению наблюдателя

$$r_o = \frac{v}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 12\mu} \right) \approx 3\mu v. \quad (3.190)$$

- $R_o \rightarrow R_-$: Этот случай соответствует темному небу $\omega_{sh} \rightarrow \pi$. Наблюдатель, в координатах $\{v, r\}$ располагается

$$r_o = \frac{v}{4} \left(1 - \sqrt{1 - 16\mu} \right) \approx 2\mu v = r_{ah}, \quad (3.191)$$

Как и следовало ожидать, в этом случае наблюдатель располагается в непосредственной близости от горизонта видимости.

Рассмотрим другой пример тени динамической черной дыры Бонора-Вайдья, являющейся обобщением метрики Вайдья в присутствии электромагнитного поля. В координатах Эддингтона-Филкенштейна метрика пространства-времени Бонора-Вайдья записывается в виде

$$ds^2 = -f(v, r)dv^2 + 2dvdr + r^2d\Omega^2, \quad (3.192)$$

где

$$f(v, r) = 1 - \frac{2M(v)}{r} + \frac{Q^2(v)}{r^2}. \quad (3.193)$$

Пространство-время Бонора-Вайдья допускает существование гомотетического вектора Киллинга, согласно (3.173) если массовая функция $M(v)$ и электрический заряд $Q(v)$ являются линейными функциями, т.е.

$$M(v) = \mu v, \quad \mu > 0, \quad (3.194)$$

$$Q^2(v) = \alpha v^2, \quad 0 < \alpha \ll 1. \quad (3.195)$$

Мы ввели безразмерный параметр α , чтобы в дальнейшем использовать его для исследования влияния заряда на тень динамической черной дыры. Подставляя эти функции в метрику Бонора-Вайдья, приходим к выражению

$$\begin{aligned} ds^2 &= -f(v, r)dv^2 + 2dvdr + r^2d\Omega^2, \\ f(v, r) &= 1 - \frac{2\mu v}{r} + \frac{\alpha v^2}{r^2}. \end{aligned} \quad (3.196)$$

Переход к конформно-статическим координатам осуществляется при помощи той же замены (3.176), как и в случае обычного Вайдья. После преобразования, пространство-время (3.196) принимает вид

$$ds^2 = e^{\frac{2t}{r_0}} d\tilde{s}^2, \quad (3.197)$$

здесь

$$\begin{aligned} d\tilde{s}^2 &= - \left(1 - \frac{2\mu r_0}{R} + \frac{\alpha v^2 r_0^2}{R^2} - \frac{2}{r_0} R \right) dt^2 \\ &\quad + 2dt dR + R^2 d\Omega^2. \end{aligned} \quad (3.198)$$

Заметим, что линейный элемент $d\tilde{s}^2$ представляет собой обобщение заряженной чёрной дыры Киселева. Изменение координат Эддингтона-Филкенштейна $0 \leq v < +\infty$ и $0 \leq r < +\infty$ соответствует изменению конформно-статичных координат $-\infty < t < +\infty$ и $0 \leq R < +\infty$. Гомотетичный вектор Киллинга K^i в координатах Эддингтона-Филкенштейна имеет вид $K = v \frac{\partial}{\partial v} + r \frac{\partial}{\partial r}$, после преобразований (3.176), он принимает вид

$$K = \frac{\partial}{\partial t}. \quad (3.199)$$

В некоторых областях пространства-времени (3.196) этот вектор является времени-подобным, а в некоторых — пространственно-подобным. Поскольку нас интересует область внешнего взаимодействия, то есть область между чёрной дырой и горизонтом, играющим роль космологического, в которой $\frac{\partial}{\partial T}$ времени-подобен, определим границы этой области.

Отметим, что в случае, если $\mu > \frac{1}{12}$, существует область пространства-времени $0 < R < R_c$, в которой гомотетичный вектор Киллинга времени-подобен. Это означает, что пространство-время содержит голую сингулярность, а горизонт $R = R_c$ играет роль космологического горизонта.

В случае, если пространство-время содержит чёрную дыру, мы всегда можем подобрать коэффициенты μ , ν и α так, чтобы при ограничении $\mu \leq \frac{1}{12}$ выполнялось следующее условие:

$$2 - 36\mu + 33\sqrt{1 - 12\mu} + (1 - 12\mu)^{\frac{3}{2}} + 108\alpha\nu^2 = 0. \quad (3.200)$$

В этом случае чёрная дыра описывается одним горизонтом — реализуется экстремальный случай чёрной дыры. Область, в которой гомотетичный вектор Киллинга времени-подобен, имеет вид $R \in (0, R_h) \cup (R_h, R_c)$, где

$$R_h = \frac{r_0}{6} \left(1 - \sqrt{1 - 12\mu} \right)$$

— конформный горизонт Киллинга экстремальной чёрной дыры.

Поскольку нас интересуют свойства тени, в дальнейшем ограничим рассмотрение областью $R_h < R < R_c$.

Заметим, что условие (3.200) накладывает ограничения на возможные значения комбинации параметров $\alpha\nu$, т.е.

$$0 \leq \alpha\nu^2 \leq \frac{1}{108} \quad (3.201)$$

Если мы рассмотрим случай не экстремальной черной дыры, а параметры μ, ν и α удовлетворяют неравенствам

$$2 - 36\mu + 33\sqrt{1 - 12\mu} + (1 - 12\mu)^{\frac{3}{2}} + 108\alpha\nu^2 < 0, \quad (3.202)$$

и

$$2 - 36\mu - 45\sqrt{1 - 12\mu} - (1 - 12\mu)^{\frac{3}{2}} + 108\alpha\nu^2 > 0, \quad (3.203)$$

то гомотетичный вектор Киллинга времени-подобен в области $R \in (0, R_-) \cup (R_+, R_c)$, где R_{\mp} внутренний и внешний конформные горизонты Киллинга. Снова, как и в случае экстремальной черной дыры, мы заинтересованы только в области $R \in (R_+, R_c)$. В конформно-статичных координатах, метрика Бонора-Вайдья допускает две сохраняющиеся величины

$$\begin{aligned} E &= e^{\frac{2t}{r_0}} \left[\left(1 - \frac{2\mu r_0}{R} + \frac{\alpha\nu^2 r_0^2}{R^2} - 2\frac{R}{r_0} \right) \frac{dt}{d\lambda} - \frac{dR}{d\lambda} \right], \\ L &= e^{\frac{2t}{r_0}} R^2 \frac{d\varphi}{d\lambda}. \end{aligned} \quad (3.204)$$

Откуда, используя условие для изотропных геодезических $g_{ik}u^i u^k = 0$, получаем радиальную компоненту в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{dR}{d\lambda} \right)^2 + V_{eff} &= E^2, \\ V_{eff} &= \left(1 - \frac{2\mu r_0}{R} + \frac{\alpha\nu^2 r_0^2}{R^2} - 2\frac{R}{r_0} \right) \frac{L^2}{R^2}. \end{aligned} \quad (3.205)$$

Мы можем применить тот же метод, который был использован для построения тени черной дыры Вайдья. Однако, стоит отметить, что производная от эффективного потенциала (3.205) ведет к кубическому уравнению для определения радиуса фотон сферы, что усложняет аналитический анализ. Вместо этого, мы отметим тот факт, что ограничение (3.201) показывает нам то, что $\alpha\nu^2 \ll 1$ и мы можем рассмотреть, как меняется радиус фотон сферы по сравнению с радиусом фотон сферы черной дыры Вайдья. Для этого рассмотрим радиус фотон сферы в виде

$$R_{ph} = R_{ph}^{(0)} + \alpha R_{ph}^{(1)}, \quad (3.206)$$

Где $R_{ph}^{(0)} = \frac{r_0}{2} (1 - \sqrt{1 - 12\mu})$ радиус фотон сферы черной дыры Вайдья. Подставляя этот радиус фотон сферы в эффективный потенциал (3.205), приравнявая его к нулю, мы приходим к уравнению

$$b^2 F(R) (1 + \alpha G(R)) = 1, \quad (3.207)$$

Где мы ввели функции

$$\begin{aligned} F(R) &\equiv \frac{1 - \frac{2\mu r_0}{R} - 2\frac{R}{r_0}}{R^2}, \\ G(R) &\equiv \frac{\nu^2 r_0^2}{R^2 \left(1 - \frac{2\mu r_0}{R} - 2\frac{R}{r_0}\right)}. \end{aligned} \quad (3.208)$$

Беря первую производную от эффективного потенциала, мы приходим к уравнению для определения радиуса фотон сферы

$$F'(R) (1 + \alpha G(R)) + \alpha F(R) G'(R) = 0, \quad (3.209)$$

Легко убедиться в том, что $F'(R_{ph}^{(0)}) = 0$. Подставляя (3.206) в (3.209) и разлагая в ряд Тейлора по степеням α , находим в первом порядке малости

$$F''(R_{ph}^{(0)}) \alpha R_{ph}^{(1)} + \alpha G'(R_{ph}^{(0)}) F(R_{ph}^{(0)}) = 0, \quad (3.210)$$

Откуда мы находим возмущение вызванные наличием электрического заряда в виде

$$R_{ph}^{(1)} = -\frac{G'(R_{ph}^{(0)}) F(R_{ph}^{(0)})}{F''(R_{ph}^{(0)})}. \quad (3.211)$$

Используя выражение радиуса фотон сферы черной дыры Вайдья и определения (3.208), мы приходим к следующим выражениям

$$\begin{aligned} F(R_{ph}^{(0)}) &= 1 - \frac{2\mu r_0}{R_{ph}^{(0)}} - 2\frac{R_{ph}^{(0)}}{r_0}, \\ F''(R_{ph}^{(0)}) &= -\frac{\frac{6\mu r_0}{(R_{ph}^{(0)})^2} + \frac{2R_{ph}^{(0)}}{r_0}}{(R_{ph}^{(0)})^3}, \\ G'(R_{ph}^{(0)}) F(R_{ph}^{(0)}) &= -\frac{4\nu^2 r_0^2}{(R_{ph}^{(0)})^5}. \end{aligned} \quad (3.212)$$

Подставляя эти значения в (3.210), находим

$$R_{ph}^{(1)} = \frac{4\nu^2 r_0}{1 - 12\mu - \sqrt{1 - 12\mu}}, \quad (3.213)$$

Как видно, значение $R_{ph}^{(1)}$ отрицательны в интервале $\mu \in (0, \frac{1}{12})$. Заметим, что при значениях $\mu = 0$ и $\mu = \frac{1}{12}$, возмущения стремятся к бесконечности. Однако, эти значения должны быть исключены из рассмотрения по следующим причинам. Во-первых, существование гомотетичного вектора Киллинга требует, чтобы $\mu \leq \frac{1}{16}$, что исключает значение $\mu = \frac{1}{12}$ из рассмотрения. Во-вторых, значение $\mu \rightarrow 0$ следует исключить из рассмотрение, т.к. оно не будет описывать черную дыру. Поскольку μ играет роль массы, а для существования черной дыры необходимо выполнение условия $\alpha\nu^2 \leq \mu$, то мы получаем, что предел $\lim_{\mu \rightarrow 0} \alpha R_{ph}^{(1)}$ с учетом выражения (3.213) приводит нас к

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \alpha R_{ph}^{(1)} = 0. \quad (3.214)$$

Более того, $\alpha R_{ph}^{(1)}$ всегда меньше $R_{ph}^{(0)}$, т.е. никакие допустимые значения параметров не приводят к значительному изменению радиус фотон сферы черной дыры Вайдья и радиус фотон сферы R_{ph} всегда остается положительным. Чтобы доказать это заменим в (3.213) $1 - 12\mu \equiv y^2$, более того, рассмотрим максимальное возможное значение $R_{ph}^{(1)}$ заменив $\alpha\nu^2$, на μ^2 . В этом случае радиус фотон сферы (3.206) принимает вид

$$\begin{aligned} R_{ph} &= \frac{r_0}{2} \left(1 - y + \frac{(y^2 - 1)^2}{18y(y - 1)} \right) \\ &= \frac{r_0(y - 1)}{36y} (-18y + (1 + y)^2). \end{aligned} \quad (3.215)$$

Если μ принимает разрешенные значения $0 < \mu < \frac{1}{16}$, то $\frac{1}{2} < y < 1$ и следовательно R_{ph} всегда положителен. Заметим, однако, что радиус фотон сферы R_{ph} обращается в ноль когда $\mu = 0$, но этого следует ожидать в виду того, что масса черной дыры обращается в ноль и фотон сфера отсутствует.

Заметим, что мы показали для всех значений электрического заряда при которых возможно формирование черной дыры, что влияние электрического заряда на тень динамической черной дыры сводится к тому, что радиус фотон сферы, а следовательно и сам радиус тени уменьшается. Соответствен-

но отклик тени черной дыры на наличие электрического заряда в метриках Рейсснера-Нордстрема и Бонора-Вайдья совпадают. Расчет критического прицельного параметра приводит нас к формуле

$$b = \frac{(R_{ph})^2}{R_{ph}^2 - 2\mu r_0 R_{ph} + \alpha \nu^2 r_0^2 - 2\frac{R_{ph}^3}{r_0}}. \quad (3.216)$$

А соответствующий угловой размер тени, видимы наблюдателем расположенным в $R = R_o$ есть

$$\sin^2 \omega_{sh} = \frac{b_{cr}^2 \left(R_o^2 - 2\mu r_0 R_o + \alpha \nu^2 r_0^2 - 2\frac{R_o^3}{r_0} \right)}{R_o^4}. \quad (3.217)$$

Если мы вернемся к координатам Эддингтона-Филкенштейна $\{r, v\}$, то радиус фотон сферы примет вид

$$r_{ph}(v) \approx r_{ph}^V(v) + \frac{4\alpha \nu^2 v}{1 - 12\mu - \sqrt{1 - 12\mu}}. \quad (3.218)$$

Как и в случае метрики Вайдья, мы можем отметить следующие моменты

- Когда $R_o = R_{ph}$, угловой размер тени равен $\omega_{sh} = \frac{\pi}{2}$ и тень покрывает половину неба наблюдателя;
- Когда наблюдатель располагается между фотон сферой и внешним горизонтом $R_{ph} < R_o < R_c$, то угловой размер тени черной дыры меняется в пределах $0 \leq \omega_{sh} \leq \frac{\pi}{2}$. Когда же наблюдатель находится у внешнего горизонта, т.е. на границе области внешнего взаимодействия, угловой размер тени стремится к нулю и наблюдатель видит яркое небо.
- Когда наблюдатель располагается между горизонтом и фотон сферой $R_+ < R_o < R_{ph}$, угловой размер тени черной дыры меняется в интервале $\frac{\pi}{2} \leq \omega_{sh} \leq \pi$. Следовательно, чем ближе наблюдатель к горизонту, тем больше тень покрывает небо. Экстремальный случай темного неба достигается при расположении наблюдателя в непосредственной близости от горизонта.

Полученный результат, который гласит, что заряд динамической чёрной дыры Бонора-Вайдья уменьшает тень чёрной дыры, является очевидным и сле-

дует из статического случая Рейсснера–Нордстрема. Здесь этот анализ приведён с целью продемонстрировать главное отличие, вносимое динамикой чёрной дыры по сравнению со статическим случаем: возможность существования тени отбрасываемой голой сингулярностью.

Голая сингулярность, в общем случае, не может отбрасывать тень, поскольку уравнение, получаемое из условия $V'_{\text{eff}}(r_{ph}) = 0$, имеет как минимум два решения, то есть существуют две фотон сферы. При наличии двух фотон сфер свет, попадая под внешнюю фотон сферу, может вновь покинуть её, достигнув внутренней фотон сферы, поскольку вторая фотон сфера играет роль точки поворота. Многие чёрные дыры также допускают существование нескольких фотон сфер — в частности, чёрная дыра Рейсснера–Нордстрема. Однако в этом случае внутренняя фотон сфера располагается под горизонтом событий, и разворот траектории света не приводит к его возвращению на бесконечность.

Существуют, однако, исследования, демонстрирующие, что голая сингулярность может отбрасывать тень, подобную тени чёрной дыры. Это связано, в первую очередь, с тем, что пространство-время, содержащее голую сингулярность, сшивается с внешним решением таким образом, что во внутренней области отсутствуют фотон сферы, а во внешней сохраняется лишь одна неустойчивая круговая орбита. Такие модели, тем не менее, считаются искусственными с физической точки зрения.

Возвращаясь к заряженной чёрной дыре: если заряд превышает массу ($Q > M$), горизонты отсутствуют, и сингулярность остаётся неприкрытой, что делает возможным наблюдение процессов в непосредственной близости от критически плотной области. В случае статической голой сингулярности типа Рейсснера–Нордстрема, а также динамической голой сингулярности типа Бонора–Вайдья, возможно формирование тени, наблюдаемой на небесной сфере.

Напомним, что радиус фотон сферы чёрной дыры Рейсснера–Нордстрема имеет вид:

$$r_{ph} = \frac{3M}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{8Q^2}{9M^2}} \right). \quad (3.219)$$

Следовательно, когда отношение заряда к массе $\frac{Q^2}{M^2}$ находится в промежулке

$$1 < \frac{Q^2}{M^2} \leq \frac{9}{8}, \quad (3.220)$$

мы имеем две фотон сферы в пространстве-времени голой сингулярности. Как мы уже упоминали выше, наличие более одной неустойчивой фотонной орбиты ведет к отсутствию тени черной дыры. Докажем, что в динамическом случае может формироваться тень в то время как в статичном случае, при аналогичных условиях, она отсутствует. Расположение кажущихся горизонтов для черной дыры Бонора-Вайдья имеет вид

$$r_{ah}^{\pm} = M(v) \pm \sqrt{M^2(v) - Q^2(v)}. \quad (3.221)$$

Если $Q^2(v) > M^2(v)$ то пространство время описывает голую сингулярность. Более того, если рассмотреть гравитационный коллапс пространства-времени Бонора-Вайдья, то его результатом может быть голая сингулярность, которая никогда не будет покрыта горизонтом.

Отметим, что для линейных функций массы и заряда, условия отсутствия горизонтов сводятся к $\mu^2 < \alpha\nu^2$. Сделав переобозначения

$$\begin{aligned} Q^2 &\equiv \alpha\nu^2 r_0^2, \\ M &\equiv \mu r_0, \end{aligned} \quad (3.222)$$

это условие сводится к $M^2 < Q^2$. В первую очередь, мы докажем, что если масса черной дыры меньше электрического заряда, то метрика Бонора-Вайдья по-прежнему содержит три конформных горизонта Киллинга. Для этого введем в рассмотрение бесконечно-малый безразмерный параметр δ

$$Q^2 = M^2 + \delta, \quad (3.223)$$

Т.е. мы рассмотрим случай, когда заряд черной дыры слегка превосходит ее массу. Тогда подставляя в метрику аналогичную заряженному Киселеву, мы получаем, что

$$\begin{aligned} ds^2 &= -f(R)dt^2 + 2dtdR + R^2d\Omega^2, \\ f(R) &= \left(1 - \frac{M}{R}\right)^2 + \frac{\delta}{R^2} - \frac{2R}{r_0}. \end{aligned} \quad (3.224)$$

Первое, что необходимо отметить, что когда $\delta = 0$ конформные горизонты Киллинга не совпадают, что можно видеть из того, что $f(M) < 0$ и $f(2M) > 0$ если $r_0 > 16M$. Предположим, что $\delta > 0$, а $r_0 = 20M$. В этом случае, $f(M) < 0$ если $f(M) < 0$. Следовательно, в виду того, что $f(2M) > 0$ пространство-время содержит три горизонта: внешний горизонт располагается на значительной дистанции от центра. Наблюдатель расположен в области $R \in (R_2, R_c)$. Таким образом, мы показали, что не смотря на то, что $Q^2 > M^2$, сингулярность прикрыта двумя конформными горизонтами Киллинга. Используя условие $V'_{eff}(R_{ph}) = 0$, мы получаем

$$G(R) \equiv \frac{3M}{R} - \frac{2M^2}{R^2} - \frac{2\delta}{R^2} + \frac{R}{r_0} - 1 = 0. \quad (3.225)$$

Докажем, что это уравнение может иметь три положительных корня. При этом две фотон сферы располагаются вблизи конформных горизонтов Киллинга, а третья фотон сфера — за пределами космологического горизонта. После этого мы докажем, что внутренняя фотон сфера находится внутри конформного горизонта Киллинга, а следовательно, в области внешнего взаимодействия будет существовать только одна неустойчивая круговая орбита, что приведёт к образованию тени.

Рассмотрим частный случай, когда $r_0 = 20M$. Нам необходимо показать, что $G(M) > 0$, $G(2M) > 0$, и что $G(R)$ может принимать отрицательные значения при $R > 2M$. Это, в частности, будет означать, что одна из фотон сфер находится внутри конформного горизонта Киллинга, а другая — в области внешнего взаимодействия.

Легко показать, что если $r_0 = 20M$ и $\delta < \frac{M^2}{20}$, то $G(M) > 0$ и $G(2M) > 0$. При этом $G(3M) < 0$, следовательно, в интервале $2M < R < 3M$ существует фотон сфера. Таким образом, можно заключить, что голая сингулярность в метрике Бонора–Вайдья может отбрасывать тень, в отличие от статического случая Рейсснера–Нордстрема. Этот факт связан с тем, что при прохождении через область динамической метрики Бонора–Вайдья, при выполнении светоподобных энергетических условий, фотон теряет энергию, в отличие от статического случая Рейсснера–Нордстрема. Этот эффект будет доказан ниже.

3.8 Тень динамической чёрной дыры

В предыдущем параграфе мы рассмотрели формирование тени динамической чёрной дыры в случае, когда пространство-время допускает существование конформного вектора Киллинга, что позволяет ввести дополнительную сохраняющуюся величину вдоль светоподобных геодезических. Однако в общем случае пространство-время, описывающее динамическую чёрную дыру, не допускает существования конформного вектора Киллинга, и аналитическое рассмотрение задачи становится затруднительным.

Первое, что необходимо отметить, — для аналитического построения модели тени динамической чёрной дыры требуется работать с уравнениями геодезических второго порядка, а не первого.

Поэтому мы начнём изложение нашего метода с исследования уравнений геодезических второго порядка для общей сферически-симметричной статической чёрной дыры. После этого расширим анализ на произвольную сферически-симметричную динамическую чёрную дыру с целью выявить общие закономерности, которые позволят построить аналитическую модель тени динамической чёрной дыры.

Поскольку мы будем сравнивать статический случай с динамическим, удобно начать рассмотрение с метрики пространства-времени, записанной в координатах Эддингтона–Финкельштейна $\{v, r, \theta, \varphi\}$:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -f dv^2 + 2\epsilon dv dr + r^2 d\Omega^2, \\ f(r) &= 1 - \frac{2M(r)}{r}. \end{aligned} \quad (3.226)$$

Как уже отмечалось, пространство-время (3.226), в виду статичности и сферической симметрии, допускает существования двух векторов Киллинга, отвечающих за трансляции по времени и поворота, что приводит к двум сохраняющимся величинам вдоль геодезических - удельным энергии E и моменту количества движения L .

$$\begin{aligned} E &= f \frac{dt}{d\lambda}, \\ L &= r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\lambda}, \end{aligned} \quad (3.227)$$

Воспользовавшись тем фактом, что в пространстве-времени, обладающим сферической симметрией, движение происходит всегда в одной плоскости, мы, выбрав за такую плоскость - экваториальную $\theta = \frac{\pi}{2}$ и учтя условие $g_{ik}u^i u^k = \delta$, можем написать радиальную часть вектора 4-скорости в виде

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V_{eff} = 0,$$

$$V_{eff} = f\left(\frac{L^2}{r^2} - \delta\right) - E^2. \quad (3.228)$$

Параметр δ определяет тип движения. В случае, если $\delta = 0$ движение происходит с ультра релятивистскими скоростями и описывается изотропными геодезическими, случай $\delta = -1$ соответствует движению всех массивных частиц вдоль времени-подобных траекторий, а случай $\delta = +1$ соответствует сверхсветовому движению вдоль пространственно-подобных геодезических и из последующих рассуждений этот случай исключается. Как мы уже упоминали, наша задача рассмотреть уравнения движения второго порядка. Для этого возьмем производную по аффинному параметру λ от радиального уравнения геодезических (3.228)

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = 2\frac{dr}{d\lambda} \frac{d^2r}{d\lambda^2},$$

$$\frac{d}{d\lambda} (V_{eff}) = \frac{\partial V_{eff}}{\partial r} \frac{dr}{d\lambda} = V'_{eff} \frac{dr}{d\lambda}. \quad (3.229)$$

Что приводит нас к уравнению

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} = -\frac{1}{2}V'_{eff}, \quad (3.230)$$

Что после подстановки первой производной от эффективного потенциала приводит нас к уравнению вида

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} = \delta \frac{M - M'r}{r^2} + (M'r - 3M) \frac{L^2}{r^4} + \frac{L^2}{r^3}, \quad (3.231)$$

В виду того, что $\frac{d^2r}{d\lambda^2}$ - есть ускорение частицы, то выражения в правой части уравнения (3.231) представляют собой фиктивные силы. В общем случае, мы можем отметить три вида сил:

- Ньютоновская сила притяжения (a_n): Этот член представляет собой классический аналог силы притяжения Ньютона. В терминах массовой функции, он может быть написан в виде

$$a_n = \frac{M'r - M}{r^2}. \quad (3.232)$$

- Центробежный барьер - центробежная сила a_c : Как известно, частицы обладающие моментом количества движения не могут достигнуть центра в виду отталкивающего центробежного барьера. Так, например, частицы падающие из состояния покоя на бесконечности на шварцшильдову черную дыру, имеют ограничения на момент количества движения, превысив который, частица не попадет под горизонт событий черной дыры. В сферической симметрии, центробежная сила не зависит от выбора метрики и всегда имеет одно и тоже значение

$$a_c = \frac{L^2}{r^3}. \quad (3.233)$$

- Общерелятивистские поправки a_g : Именно эти поправки ответственны за эффекты общей теории относительности такие как аномальная прецессия перигелия Меркурия и отклонение лучей света гравитационным полем Солнца.

$$a_g = \frac{M'r - 3M}{r^4} L^2. \quad (3.234)$$

Таким образом, уравнение геодезических (3.231) могут быть записаны в терминах фиктивных сил определенных выше в виде

$$\frac{d^2 r}{d\lambda^2} = -\delta a_n + a_c + a_g. \quad (3.235)$$

Отметим первое и главное наблюдение, что центробежная сила и общерелятивистские поправки не зависят от типа движения. От типа движения зависит знак члена отвечающего ньютоновой силе притяжения. Отметим также, что этот член вовсе отсутствует при рассмотрении изотропных геодезических. Из рассмотрения тени черных дыр в статичном случае, мы знаем, что r_{ph} является радиусом фотон сферы, если выполняются следующие условия

$$V_{eff}(r_{ph}) = 0, \quad V'_{eff}(r_{ph}) = 0. \quad (3.236)$$

Однако, для изотропных геодезических, равенство нулю эффективного потенциала сводится к балансу центробежной силы и общерелятивистских поправок, т.е.

$$a_c(r_{ph}) + a_g(r_{ph}) = 0. \quad (3.237)$$

Таким образом, можно переформулировать определение фотон сферы: Радиус фотон сферы - это радиус при котором центробежная сила и общерелятивистские поправки уравниваются друг друга. Именно это утверждение, поможет нам расширить понятие тени на динамический случай. В динамическом случае, мы рассмотрим метрику пространства-времени динамической черной дыры в виде (3.226), но с зависящей от времени массовой функцией

$$M = M(v, r). \quad (3.238)$$

Для того, чтобы рассмотреть уравнения геодезических второго порядка, мы рассмотрим действие I определяющее движение частицы в искривленном пространстве-времени в виде

$$I = \int \mathcal{L} d\lambda = \frac{1}{2} \int \left[-f(v, r) \left(\frac{dv}{d\lambda} \right)^2 + 2\varepsilon \frac{dv}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 \right] d\lambda. \quad (3.239)$$

Воспользовавшись уравнением Эйлера-Лагранжа, мы получим систему уравнений в виде

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{L}{r^2}, \quad (3.240)$$

$$-\frac{1}{2} f' \left(\frac{dv}{d\lambda} \right)^2 + r \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 - \varepsilon \frac{d^2 v}{d\lambda^2} = 0, \quad (3.241)$$

$$\varepsilon \frac{d^2 r}{d\lambda^2} = \frac{1}{2} \dot{f} \left(\frac{dv}{d\lambda} \right)^2 + f \frac{d^2 v}{d\lambda^2} + f' \frac{dv}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda}. \quad (3.242)$$

Выражая $f \frac{d^2 v}{d\lambda^2}$ из уравнения (3.241) и используя уравнение (3.240), мы приходим к выражению

$$f \frac{d^2 v}{d\lambda^2} = \varepsilon f \frac{L^2}{r^3} - \frac{1}{2} \varepsilon f f' \left(\frac{dv}{d\lambda} \right)^2. \quad (3.243)$$

Условие, которому должны подчиняться изотропные уравнения геодезических $g_{ik} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda} = 0$ может быть записано в виде

$$f' \frac{dv}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} = \frac{1}{2} \varepsilon f f' - \frac{1}{2} \varepsilon f' \frac{L^2}{r^2} \left(\frac{dv}{d\lambda} \right)^2. \quad (3.244)$$

Теперь, подставляя (3.243) и (3.244) в уравнение (3.243), мы окончательно получим

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} = \frac{1}{2}\varepsilon f \left(\frac{dv}{d\lambda} \right)^2 - \frac{1}{2}f' \frac{L^2}{r^2} + f \frac{L^2}{r^3}. \quad (3.245)$$

Подставляя теперь функцию $f(r, v)$, мы приходим к уравнению движения ультра релятивистских частиц

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} = -\varepsilon \frac{\dot{M}}{r} \left(\frac{dv}{d\lambda} \right)^2 + (M'r - 3M) \frac{L^2}{r^4} + \frac{L^2}{r^3}. \quad (3.246)$$

Заметим, что отличие от (3.231) заключается в наличии первого члена $\varepsilon \frac{\dot{M}}{r} \left(\frac{dv}{d\lambda} \right)^2$ в правой части уравнения. Этот член представляет собой постньютонову силу притяжения возникающую в результате динамических процессов протекающих вблизи черной дыры, таких как аккреция или излучение. Он соответствует обмену энергией черной дыры с окружающим ее веществом. Второй и третий члены правой части уравнения (3.246) представляют собой общерелятивистские поправки и центробежную силу. Пользуясь определением Мизнера [239], мы можем определить обобщенный видимый поток Λ , связанный с темпом аккреции, в виде

$$\Lambda = \varepsilon \dot{M} \left(\frac{dv}{d\lambda} \right)^2, \quad (3.247)$$

Мы будем называть первый член правой части уравнения (3.246), следуя терминологии Мизнера, индуцированным ускорением $a_i \equiv \frac{\Lambda}{r}$. Таким образом в терминах индуцированного ускорения, общерелятивистских поправок и центробежной силы, уравнение геодезической (3.246) может быть переписано в виде

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} = a_i(v, r) + a_g(v, r) + a_c(v, r). \quad (3.248)$$

Известный, и уже неоднократно упоминавшийся, факт, что в динамических черных дырах энергия частицы не сохраняется. Однако, мы по-прежнему можем определить энергию частицы, как временную компоненту обобщенного вектора энергии-импульса, который определяется через лагранжиан

$$2\mathcal{L} = g_{ik} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda}, \quad (3.249)$$

следующим образом

$$E(v) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} = f \frac{dv}{d\lambda} - \frac{dr}{d\lambda}. \quad (3.250)$$

Используя уравнение (3.241) и (3.250), вместе с условием $g_{ik}u^i u^k = 0$, мы можем формально написать

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V_{eff}(v, r) &= 0, \\ V_{eff}(v, r) &= f \frac{L^2}{r^2} - E^2(v). \end{aligned} \quad (3.251)$$

Где, энергия фотона не сохраняющаяся величина и неизвестная функция времени. Определим ее связь с обобщенным видимым потоком Λ . Для этого продифференцируем уравнение (3.251) по аффинному параметру λ , при этом замечаем, что

$$\frac{d}{d\lambda}(V_{eff}) = \frac{\partial V_{eff}}{\partial v} \frac{dv}{d\lambda} + \frac{\partial V_{eff}}{\partial r} \frac{dr}{d\lambda}, \quad (3.252)$$

мы получаем

$$2 \frac{dr}{d\lambda} \left(\frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial V_{eff}}{\partial r} \right) + \frac{\partial V_{eff}}{\partial v} \frac{dv}{d\lambda} = 0. \quad (3.253)$$

Однако, производная по r от эффективного потенциала приводит нас к

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v_{eff}}{\partial r} = a_g - a_c. \quad (3.254)$$

и используя уравнение геодезической (3.246), мы заменяем выражение в квадратных скобках, на индуцированное ускорение и получаем

$$-2 \frac{\Lambda}{r} \frac{dr}{d\lambda} + \frac{\partial V_{eff}}{\partial v} \frac{dv}{d\lambda} = 0. \quad (3.255)$$

Вспоминая определение обобщенного видимого потока (3.247) и используя тот факт, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{eff}}{\partial v} &= -\frac{2\dot{M}L^2}{r^3} - 2E\dot{E}, \\ 2 \frac{dr}{d\lambda} \frac{dv}{d\lambda} &= f \left(\frac{dv}{d\lambda} \right)^2 - \frac{L^2}{r^2}, \end{aligned} \quad (3.256)$$

мы приходим к искомому соотношению между энергией $E(v)$ и обобщенного потока энергии Λ в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dv}(E^2) &= -\frac{\Lambda}{r}, \\ E^2 &= -\int_0^v \frac{\Lambda}{r} dv. \end{aligned} \quad (3.257)$$

Заметим, что обобщенный видимый поток связан с изменением массы черной дыры $\Lambda \propto \dot{M}$. Следовательно, когда динамические процессы заканчиваются и устанавливается статическая метрика, масса черной дыры больше не меняется со временем, обобщенный видимый поток исчезает, следовательно, изменение энергии со временем обращается в ноль, т.е. энергия вновь становится сохраняющейся величиной, и мы приходим к уравнению геодезических (3.231), определяющим движение фотонов в статической метрике. Таким образом, мы можем установить связь между энергетическими условиями и изменением энергии фотона

- При диссипативных процессах, когда энергия фотона есть убывающая функция $\dot{E} < 0$, масса черной дыры увеличивается, а следовательно $\dot{m} > 0$ и изотропные энергетические условия выполняются. Подобная ситуация соответствует аккреции вещества или гравитационному коллапсу;
- Наоборот, если фотон пролетая мимо черной дыры приобретает дополнительную энергию, т.е. $\dot{E} > 0$, то это означает, что масса черной дыры убывает $\dot{M} < 0$, а следовательно изотропные энергетические условия нарушаются.

Это объясняет зависимость тени черной дыры от энергетических условий, описанное выше: если энергетические условия выполняются, то тень растет. Это означает, что фотон пролетая мимо черной дыры становится менее энергичным и захватывается черной дырой на больших расстояниях чем в статическом случае. Наоборот, если фотон приобретает дополнительную энергию, то он может улететь на бесконечность избежав попадание под горизонт черной дыры. В этом случае тень черной дыры уменьшается. Более того, этот результат имеет непосредственное наблюдательное проявление, помимо тени черной дыры. Все дело в том, что нарушение изотропных энергетических условий происходит, в частности, при аккреции заряженных частиц на черную дыру. Как было показано выше, такой процесс приводит к уменьшению кажущегося горизонта черной дыры. Следовательно, частица пролетая рядом с черной дырой в момент аккреции заряженных частиц, будет приобретать дополнительную энергию и уносить ее на бесконечность, что может

в последствии выразиться в космических лучах. Для определения радиуса динамичной фотон сферы, мы сделаем два предположения:

1. медленный темп аккреции. Это проявляется в том, что обобщенный видимый поток мал $\Lambda \ll 1$.
2. Радиальное ускорение равно нулю, т.е. $\frac{d^2r}{d\lambda^2} = 0$.

Для того, чтобы рассчитать фотон сферу, мы введем параметр α , по которому мы будем производить разложение, после чего мы положим его равным единице. Также, мы предположим, что радиус фотон сферы может быть записан следующим образом

$$r_{ph} = r_0 + \alpha r_1(v), \quad (3.258)$$

Где r_0 - радиус фотон сферы черной дыры в отсутствии динамики, а r_1 - динамическое возмущение, которое учитывает роль аккреции. После разложения в ряд Тейлора и последующих упрощений, параметр α кладется равным единице. Этот метод позволит вычислять радиус фотон сферы в медленно-эволюционирующих черных дырах. Уравнение геодезических (3.248) может быть записано в виде

$$\alpha a_i + a_g + a_c = 0, \quad (3.259)$$

и разлагая по степеням α , мы найдем, что r_0 есть решение алгебраического уравнения

$$a_g + a_c = 0, \quad (3.260)$$

А поправки первого порядка приводят нас к выражению

$$r_1 = -\frac{a_i}{a'_g + a'_c}. \quad (3.261)$$

Как было показано выше, радиус фотон сферы уменьшается если нарушаются энергетические условия. Покажем, что $r_1 < 0$ только в том случае, когда нарушаются энергетические условия, что будет приводить к уменьшению радиуса фотон сферы в результате процесса аккреции. Из определений обобщенного видимого потока (3.247) и индуцированного ускорения a_i видно, что изотропные энергетические условия требуют, чтобы $a_i \leq 0$ ($\dot{M} \geq 0$). Следовательно, для зависимости радиуса фотон сферы только от энергетических условий, нам необходимо и достаточно показать, что знаменатель (3.261)

всегда положителен. Исходя из определений центробежной силы a_c и общерелятивистских поправок a_g , мы находим

$$\begin{aligned} a'_g &= \frac{L^2}{r^5} (M''r^2 - 6M'r + 12M), \\ a'_c &= -\frac{3L^2}{r^4}. \end{aligned} \quad (3.262)$$

Следовательно, для положительности знаменателя, должно выполняться следующее неравенство

$$M''r^2 - 6M'r + 12M - 3r \geq 0. \quad (3.263)$$

Мы знаем, что доминантные энергетические условия требуют выполнения условия $-\frac{M''}{r} \leq 2\frac{M'}{r^2}$. Применяя это неравенство, мы приходим к следующему выражению

$$-8M'r + 12M - 3r \geq 0 \quad (3.264)$$

Радиус фотон сферы должен удовлетворять следующему условию

$$\begin{aligned} 6M - 2M'r - 2r &= 0, \\ 12M - 3r - 8M'r &= 5r - 4M \geq 0. \end{aligned} \quad (3.265)$$

Последнее неравенство выполняется в виду того, что радиус фотон сферы и радиус горизонта видимости должны удовлетворять соотношению $r_0 \geq \frac{3}{2}r_h$. Следовательно, мы показали, что знаменатель (3.261) всегда положителен, а, следовательно, поведение фотон сферы напрямую зависит от энергетических условий. В качестве примера, рассмотрим метрику Вайдья, которая имеет вид

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M(v)}{r} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2. \quad (3.266)$$

Соответствующее статичное пространство-время есть черная дыра Шварцшильда, для которой радиус фотон сферы $r_0 = 3M_0$. В случае аккреции $\dot{M} > 0$, индуцированное ускорение удовлетворяет условию $a_i < 0$. Производные от a_g и a_c имеют вид

$$\begin{aligned} a'_g &= \frac{12M(v)}{(3M_0)^5} L^2, \\ a'_c &= -\frac{3L^2}{(3M_0)^4}. \end{aligned} \quad (3.267)$$

Тогда первая поправка к фотон сфере r_1 задается уравнением

$$r_1 = -\frac{(3M_0)^5 a_i}{12M(v)L^2 - 9M_0L^2} \geq 0. \quad (3.268)$$

Поскольку мы рассматриваем процесс аккреции, то $M(v) \geq M_0$ и никаких особенностей не возникает. Таким образом, радиус фотон сферы задается уравнением

$$r_{ph} = r_0 + r_1(v), \quad (3.269)$$

Теперь зададимся вопросом о расчете углового размера тени динамической черной дыры. Для этого мы воспользуемся тетрадой, которая определяет локально-ортогональный базис для наблюдателя. Эта тетрада имеет вид

$$\begin{aligned} e_0 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} \frac{d}{dv}, \\ e_1 &= e_0 + \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \frac{d}{dr}, \\ e_2 &= \frac{1}{r} \frac{d}{d\theta}, \\ e_3 &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{d\varphi}. \end{aligned} \quad (3.270)$$

В экваториальной плоскости $\theta = \frac{\pi}{2}$, изотропная геодезическая описывается координатами $v(\lambda), r(\lambda), \varphi(\lambda)$. Касательный вектор к геодезической может быть написан в виде

$$\dot{v} \frac{d}{dv} + \dot{r} \frac{d}{dr} + \dot{\varphi} \frac{d}{d\varphi} = \xi (e_0 + \cos \omega e_1 - \sin \omega e_3). \quad (3.271)$$

Где ξ - скалярный множитель, а ω - угол между изотропной геодезической и радиальным направлением в системе покоя наблюдателя. Сравнивая коэффициенты при $\frac{d}{dr}$ и $\frac{d}{d\varphi}$, мы можем написать

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \cos \omega, \\ \dot{\varphi} &= -\frac{1}{r} \sin \omega. \end{aligned} \quad (3.272)$$

Чтобы продолжить построение, нам необходимо найти выражение для $\frac{dr}{d\varphi}$. Используя (3.251), (3.240) и (3.272), найдем, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 &= r^2 f \cot^2 \omega, \\ \sin^2 \omega_{sh} &= \frac{L^2}{E^2(v)} \frac{f(r_o)}{r_o^2}, \end{aligned} \quad (3.273)$$

Где $\sin^2 \omega_{sh}$ представляет собой угловой радиус тени, видимый наблюдателем расположенным при $r = r_o$. Как следует из полученного результата: угловой размер тени динамической черной дыры увеличивается если происходит процесс диссипации $\dot{E} < 0$ и наоборот, если фотон пролетая мимо черной дыры приобретает дополнительную энергию $\dot{E} > 0$, то угловой размер тени черной дыры уменьшается. Следовательно, мы можем сформулировать теорему:

Теорема. Тень динамической черной дыры увеличивается, если при пролете мимо черной дыры фотон теряет энергию, и уменьшается, если пролетающий фотон приобретает дополнительную энергию.

Заметим, что в случае, если радиус фотон сферы совпадает с горизонтом энергетических условий, то энергия фотона остается неизменной, а следовательно тень не меняется со временем и ведет себя как в статичном случае.

Результаты данной главы были опубликованы в следующих статьях:

- Влияние аккреционного диска на тень сферически-симметричной и стационарной черных дыр опубликованы в статьях [99, 100];
- Исследование асимптотически-плоского пространства-времени и теорема о зависимости поведения тени от энергетических условий опубликовано в статье [240];
- Применение методов расчета тени к модифицированным черным дырам Шварцшильда и Рейсснера-Нордстрема представлено в статье [241];
- Построение аналитической модели тени динамической черной дыры Бонора-Вайдья (заряженного Вайдья) опубликовано в статье [92].

Заключение

В данной диссертации были проведены исследования различных аспектов теории регулярных черных дыр, включая их структуру, формирование и эволюцию, а также влияние аккреционных процессов на их наблюдаемые характеристики. Результаты работы позволяют углубить понимание как фундаментальных свойств черных дыр, так и практических методов их изучения через наблюдения их теней.

Основные полученные результаты

1. Построена модель статической регулярной чёрной дыры, источником которой служит вещество Хагедорна, соответствующее реалистичному уравнению состояния при высоких плотностях.
2. Установлена зависимость эволюции горизонтов видимости от выполнения светоподобных энергетических условий. Проведён анализ процессов испарения чёрных дыр в контексте новых данных о поведении горизонтов видимости.
3. Разработана физически обоснованная модель гравитационного коллапса барионной материи, в рамках которой выявлены ключевые процессы, приводящие к образованию регулярной чёрной дыры.
4. Выполнена оценка плотности электромагнитного излучения, возникающего при фазовых переходах вещества в процессе гравитационного коллапса.
5. Обнаружены новые свойства тени динамической сферически-симметричной чёрной дыры. Показана её зависимость от светоподобных энергетических условий.
6. Установлена аналитическая зависимость между геометрическими деформациями пространства-времени и наблюдаемыми размерами тени чёрной дыры. Получено явное выражение для размера тени в зависимости от параметров деформации.

Данная работа представляет собой вклад в современную теорию черных дыр, предоставляя новые инструменты для исследования их структуры, динамики и наблюдаемых свойств. Полученные результаты имеют фундаментальное значение для понимания процессов, происходящих в окрестностях черных дыр, а также для интерпретации данных, получаемых современными астрономическими наблюдениями, таких как изображения теней черных дыр.

Кроме того, разработанные методы регуляризации и моделирования коллапса позволяют лучше понять природу экзотической материи и механизмы ее образования в процессе гравитационного коллапса. Эти результаты могут быть применены для дальнейшего изучения вопросов квантовой гравитации и физики высоких энергий.

Благодарности

Хочу выразить благодарность недавно почившему профессору Андрею Анатольевичу Грибу, который на протяжении многих лет являлся моим научным руководителем, наставником и учителем. Данная работа стала возможной благодаря многолетнему с ним сотрудничеству, чьи критические замечания и идеи всегда позволяли по-новому взглянуть на поставленные задачи.

Особую благодарность хочу выразить Российскому Государственному Педагогическому Университету имени А. И. Герцена, в чьих стенах я сначала защитил бакалаврскую работу по прикладной математике, а в последствии магистерскую и кандидатскую по теоретической физике и чьим сотрудником являюсь по сей день. Кафедре теоретической физики и астрономии за поддержку и живые обсуждения тем. Лаборатории А. А. Фридмана, на чьих семинарах я научился излагать свои научные идеи. Большинство идей возникали в результате живых дискуссий на неофициальном, междисциплинарном семинаре атомно-молекулярных столкновений и космологии. Хочу также выразить благодарность моим зарубежным коллегам и друзьям:

- Профессору Восточного Средиземноморского Университета - Али Овгюну за интерес и качественную и быструю работу над предложенными мною проектами;

- Профессору университета Билкент - Якобу Хаярзадеху за добросовестное отношение к процессу написания научных статей;
- Профессору Института Высоких Энергий Пекина - Ю Линку за сотрудничество и обсуждения в области регулярных черных дыр;
- Научному сотруднику Университета Аликанте - Анхелю Ринкону за его любезное приглашение и возможность совместной работы в Аликанте;
- Профессорам и научным сотрудникам университета Ахмедабада и Чарусата - Панкаджу Джоши, Дипанджину Деи, Кариму Моссани, Ашоку Джоши, Харунку Солани за дружелюбную атмосферу, которая меня окружала во время моей работе в Индии;
- Профессору университета Бишоп - Валерио Фараони за ценные комментарии, касающиеся структуры горизонтов черной дыры.

Я благодарен профессору Виктору Константиновичу Дубровичу, который показал мне, что в любой модели нужно отталкиваться в первую очередь от физики, что развернуло мои исследования на поиски физических явлений, а не строгого математического описания, которое может и не иметь ничего общего с природой. Моим друзьям и коллегам, которые терпеливо, на протяжении многих лет, помогают мне с компьютерными программами и исправляют мои ошибки в коде \LaTeX .

Литература

1. Tipler F. J. Singularities in conformally flat spacetimes // Phys. Lett. A. 1977. Vol. 64. P. 8–10. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.60.024014>.
2. Nolan B. C. Strengths of singularities in spherical symmetry // Phys. Rev. D. 1999. Vol. 60. P. 024014.
3. Clarke C.J.S., Królak A. Conditions for the occurrence of strong curvature singularities // Journal of Geometry and Physics. 1985. Т. 2, № 2. С. 127–143. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0393044085900129>.
4. Oppenheimer J. R., Snyder H. On Continued gravitational contraction // Phys. Rev. 1939. Vol. 56. P. 455–459.
5. Poisson E. A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics. Cambridge University Press, 2009. 12.
6. Gravitational Collapse and Spacetime Singularities / Ed. by P. S. Joshi. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2012. 9.
7. Joshi P. S., Malafarina D. Recent developments in gravitational collapse and spacetime singularities // Int. J. Mod. Phys. D. 2011. Vol. 20. P. 2641–2729.
8. Singh T. P., Joshi P. S. The Final fate of spherical inhomogeneous dust collapse // Class. Quant. Grav. 1996. Vol. 13. P. 559–572.
9. Jhingan S., Joshi P. S., Singh T. P. The Final fate of spherical inhomogeneous dust collapse. 2. Initial data and causal structure of singularity // Class. Quant. Grav. 1996. Vol. 13. P. 3057–3068.

10. Causal structure of singularity in non-spherical gravitational collapse / D. Dey, P. S. Joshi, K. Mosani et al. // Eur. Phys. J. C. 2022. Vol. 82, no. 5. P. 431.
11. Faraoni V. Evolving black hole horizons in General Relativity and alternative gravity // Galaxies. 2013. Vol. 1, no. 3. P. 114–179.
12. Penrose R. Gravitational collapse and space-time singularities // Phys. Rev. Lett. 1965. Vol. 14. P. 57–59.
13. Hawking S. Occurrence of singularities in open universes // Phys. Rev. Lett. 1965. Vol. 15. P. 689–690.
14. Sakharov A. D. The Initial Stage of an Expanding Universe and the Appearance of a Nonuniform Distribution of Matter // Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics. 1966. jan. Vol. 22. P. 241. URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1966JETP...22..241S>.
15. Gliner E. B. Algebraic Properties of the Energy-momentum Tensor and Vacuum-like States of Matter // Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics. 1966. feb. Vol. 22. P. 378. URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1966JETP...22..378G>.
16. Padmanabhan T. Why Does the Universe Expand ? // Gen. Rel. Grav. 2010. Vol. 42. P. 2743–2750.
17. Ansoldi S. Spherical black holes with regular center: A Review of existing models including a recent realization with Gaussian sources // Conference on Black Holes and Naked Singularities. 2008. 2.
18. Bardeen J. Non-singular general relativistic gravitational collapse // Proceedings of the 5th International Conference on Gravitation and the Theory of Relativity. 1968. sep. P. 87. URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1968qtr..conf...87B>.
19. Ayon-Beato E., Garcia A. The Bardeen model as a nonlinear magnetic monopole // Phys. Lett. B. 2000. Vol. 493. P. 149–152.

20. Sorokin D. P. Introductory Notes on Non-linear Electrodynamics and its Applications // Fortsch. Phys. 2022. Vol. 70, no. 7-8. P. 2200092.
21. Fan Z.-Y., Wang X. Construction of Regular Black Holes in General Relativity // Phys. Rev. D. 2016. Vol. 94, no. 12. P. 124027.
22. Bronnikov K. A., Fabris J. C. Regular phantom black holes // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 96. P. 251101.
23. Bronnikov K. A., Walia R. K. Field sources for Simpson-Visser spacetimes // Phys. Rev. D. 2022. Vol. 105, no. 4. P. 044039.
24. Bokulić A., Smolić I., Jurić T. Constraints on singularity resolution by non-linear electrodynamics // Phys. Rev. D. 2022. Vol. 106, no. 6. P. 064020.
25. Bronnikov K. A. Regular magnetic black holes and monopoles from nonlinear electrodynamics // Phys. Rev. D. 2001. Vol. 63. P. 044005.
26. Balart L., Vagenas E. C. Regular black holes with a nonlinear electrodynamics source // Phys. Rev. D. 2014. Vol. 90, no. 12. P. 124045.
27. Balart L., Panotopoulos G., Rincón A. Regular Charged Black Holes, Energy Conditions, and Quasinormal Modes // Fortsch. Phys. 2023. Vol. 71, no. 12. P. 2300075.
28. Lagrangian reverse engineering for regular black holes / A. Bokulic, E. Franzin, T. Juric et al. // Phys. Lett. B. 2024. Vol. 854. P. 138750.
29. Dymnikova I. Vacuum nonsingular black hole // Gen. Rel. Grav. 1992. Vol. 24. P. 235–242.
30. Hayward S. A. Formation and evaporation of regular black holes // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 96. P. 031103.
31. Bonanno A., Malafarina D., Panassiti A. Dust Collapse in Asymptotic Safety: A Path to Regular Black Holes // Phys. Rev. Lett. 2024. Vol. 132, no. 3. P. 031401.
32. Mosani K., Joshi P. S. Regular black hole from regular initial data. 2023. 6.

33. Dynamical Formation of Regular Black Holes / P. Bueno, P. A. Cano, R. A. Hennigar et al. 2024. 12.
34. Regular black holes from thin-shell collapse / P. Bueno, P. A. Cano, R. A. Hennigar et al. 2024. 12.
35. Sajadi S. N., Ponglertsakul S., Luongo O. Constructing regular black holes from multi-polytropic equations of state. 2025. 2.
36. Shojai F., Sadeghi A., Hassannejad R. Generalized Oppenheimer–Snyder gravitational collapse into regular black holes // *Class. Quant. Grav.* 2022. Vol. 39, no. 8. P. 085003.
37. Vertogradov V., Övgün A. Exact regular black hole solutions with de Sitter cores and Hagedorn fluid // *Class. Quant. Grav.* 2025. Vol. 42, no. 2. P. 025024.
38. Black hole with a de Sitter core: classical and quantum features / N. Heidari, A. A. Araújo Filho, V. V. and et al. 2024. 12.
39. Vertogradov Vitalii. Regular Black Hole from gravitational collapse of dust and radiation // *Phys. Dark Univ.* 2025. T. 48. C. 101881.
40. Vertogradov V., Övgün A., Shatov D. Formation of regular black hole from baryonic matter // *Chin. Phys. C.* 2025. 2. Vol. 49, no. 11. P. 115103.
41. Abbott B. P. et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger // *Phys. Rev. Lett.* 2016. Vol. 116, no. 6. P. 061102.
42. Abbott B. P. et al. GW170814: A Three-Detector Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Coalescence // *Phys. Rev. Lett.* 2017. Vol. 119, no. 14. P. 141101.
43. Akiyama K. et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole // *Astrophys. J. Lett.* 2019. Vol. 875. P. L1.
44. Akiyama K. et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. II. Array and Instrumentation // *Astrophys. J. Lett.* 2019. Vol. 875, no. 1. P. L2.

45. Akiyama K. et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. III. Data Processing and Calibration // *Astrophys. J. Lett.* 2019. Vol. 875, no. 1. P. L3.
46. Akiyama K. et al. First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way // *Astrophys. J. Lett.* 2022. Vol. 930, no. 2. P. L12.
47. Akiyama K. et al. First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. II. EHT and Multiwavelength Observations, Data Processing, and Calibration // *Astrophys. J. Lett.* 2022. Vol. 930, no. 2. P. L13.
48. Regular Black Holes: A Short Topic Review / C. Lan, H. Yang, Y. Guo et al. // *Int. J. Theor. Phys.* 2023. Vol. 62, no. 9. P. 202.
49. Frolov V. P. Notes on nonsingular models of black holes // *Phys. Rev. D.* 2016. Vol. 94, no. 10. P. 104056.
50. Chamseddine A. H., Mukhanov V. Nonsingular Black Hole // *Eur. Phys. J. C.* 2017. Vol. 77, no. 3. P. 183.
51. Bronnikov K. A. Comment on ‘Regular black hole in general relativity coupled to nonlinear electrodynamics’ // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 85. P. 4641.
52. Bronnikov K. A. Nonlinear electrodynamics, regular black holes and wormholes // *Int. J. Mod. Phys. D.* 2018. Vol. 27, no. 06. P. 1841005.
53. Rodrigues M. E., de Sousa Silva M. V. Bardeen Regular Black Hole With an Electric Source // *JCAP.* 2018. Vol. 06. P. 025.
54. Misyura M., Rincon A., Vertogradov V. Non-singular black hole by gravitational decoupling and some thermodynamic properties // *Phys. Dark Univ.* 2024. Vol. 46. P. 101717.
55. Spallucci E., Smailagic A. Regular black holes from semi-classical down to Planckian size // *Int. J. Mod. Phys. D.* 2017. Vol. 26, no. 07. P. 1730013.

56. Formation of black holes in first-order phase transitions as a cosmological test of symmetry-breaking mechanisms / R. V. Konoplich, S. G. Rubin, A. S. Sakharov et al. // *Phys. Atom. Nucl.* 1999. Vol. 62. P. 1593–1600.
57. First order phase transitions as a source of black holes in the early universe / M. Y. Khlopov, R. V. Konoplich, S. G. Rubin et al. // *Grav. Cosmol.* 1999. Vol. 2. P. S1.
58. Khlopov M. Y. Primordial Black Holes // *Res. Astron. Astrophys.* 2010. Vol. 10. P. 495–528.
59. Signatures of primordial black hole dark matter / K. M. Belotsky, A. D. Dmitriev, E. A. Esipova et al. // *Mod. Phys. Lett. A.* 2014. Vol. 29, no. 37. P. 1440005.
60. Dymnikova I., Khlopov M. Regular black hole remnants and graviatoms with de Sitter interior as heavy dark matter candidates probing inhomogeneity of early universe // *Int. J. Mod. Phys. D.* 2015. Vol. 24, no. 13. P. 1545002.
61. Capozziello S., De Bianchi S., Battista E. Avoiding singularities in Lorentzian-Euclidean black holes: The role of atemporality // *Phys. Rev. D.* 2024. Vol. 109, no. 10. P. 104060.
62. Bueno P., Cano P. A., Hennigar R. A. Regular black holes from pure gravity // *Phys. Lett. B.* 2025. Vol. 861. P. 139260.
63. Non-minimal WuB \bar{B} “Yang monopole // *Physics Letters B.* 2007. T. 644, № 5. C. 294–298.
64. Balakin Alexander B., Bochkarev Vladimir V., Lemos José P. S. Nonminimal coupling for the gravitational and electromagnetic fields: Black hole solutions and solitons // *Phys. Rev. D.* 2008. T. 77. C. 084013.
65. Balakin Alexander B., Zayats Alexei E. Nonminimal black holes with regular electric field // *Int. J. Mod. Phys. D.* 2015. T. 24, № 09. C. 1542009.

66. Balakin Alexander B., Lemos José P. S., Zayats Alexei E. Regular nonminimal magnetic black holes in spacetimes with a cosmological constant // *Phys. Rev. D.* 2016. T. 93, № 2. C. 024008.
67. Balakin Alexander B., Lemos José P. S., Zayats Alexei E. Magnetic black holes and monopoles in a nonminimal Einstein-Yang-Mills theory with a cosmological constant: Exact solutions // *Phys. Rev. D.* 2016. T. 93, № 8. C. 084004.
68. Tsukamoto N. Deflection angle in the strong deflection limit in a general asymptotically flat, static, spherically symmetric spacetime // *Phys. Rev. D.* 2017. Vol. 95, no. 6. P. 064035.
69. Perlick V., Tsupko O. Y., Bisnovaty-Kogan G. S. Black hole shadow in an expanding universe with a cosmological constant // *Phys. Rev. D.* 2018. Vol. 97, no. 10. P. 104062.
70. Hod S. Spherical null geodesics of rotating Kerr black holes // *Phys. Lett. B.* 2013. Vol. 718. P. 1552–1556.
71. Khoo F. S., Ong Y. C. Lux in obscurio: Photon Orbits of Extremal Black Holes Revisited // *Class. Quant. Grav.* 2016. Vol. 33, no. 23. P. 235002. [Erratum: *Class.Quant.Grav.* 34, 219501 (2017)].
72. Decanini Y., Folacci A., Raffaelli B. Unstable circular null geodesics of static spherically symmetric black holes, Regge poles and quasinormal frequencies // *Phys. Rev. D.* 2010. Vol. 81. P. 104039.
73. Shoom A. A. Metamorphoses of a photon sphere // *Phys. Rev. D.* 2017. Vol. 96, no. 8. P. 084056.
74. Cederbaum C., Galloway G. J. Uniqueness of photon spheres in electrovacuum spacetimes // *Class. Quant. Grav.* 2016. Vol. 33. P. 075006.
75. Johannsen T. Photon Rings around Kerr and Kerr-like Black Holes // *Astrophys. J.* 2013. Vol. 777. P. 170.

76. Abdujabbarov A. A., Rezzolla L., Ahmedov B. J. A coordinate-independent characterization of a black hole shadow // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 2015. Vol. 454, no. 3. P. 2423–2435.
77. New method for shadow calculations: Application to parametrized axisymmetric black holes / Z. Younsi, A. Zhidenko, L. Rezzolla et al. // *Phys. Rev. D.* 2016. Vol. 94, no. 8. P. 084025.
78. Tsupko O. Y. Deflection of light rays by a spherically symmetric black hole in a dispersive medium // *Phys. Rev. D.* 2021. Vol. 103, no. 10. P. 104019.
79. Shadows and negative precession in non-Kerr spacetime / P. Bambhaniya, D. Dey, A. B. Joshi et al. // *Phys. Rev. D.* 2021. Vol. 103, no. 8. P. 084005.
80. Thin accretion disk in the Simpson-Visser black-bounce and wormhole spacetimes / P. Bambhaniya, S. K, K. Jusufi et al. // *Phys. Rev. D.* 2022. Vol. 105, no. 2. P. 023021.
81. Tsupko O. Y., Bisnovatyi-Kogan G. S. First analytical calculation of black hole shadow in McVittie metric // *Int. J. Mod. Phys. D.* 2020. Vol. 29, no. 09. P. 2050062.
82. Chowdhuri A., Bhattacharyya A. Shadow analysis for rotating black holes in the presence of plasma for an expanding universe // *Phys. Rev. D.* 2021. Vol. 104, no. 6. P. 064039.
83. Tsukamoto N., Li Z., Bambi C. Constraining the spin and the deformation parameters from the black hole shadow // *JCAP.* 2014. Vol. 06. P. 043.
84. Tsukamoto N. Black hole shadow in an asymptotically-flat, stationary, and axisymmetric spacetime: The Kerr-Newman and rotating regular black holes // *Phys. Rev. D.* 2018. Vol. 97, no. 6. P. 064021.
85. Saurabh S., Bambhaniya P., Joshi P. S. Imaging ultracompact objects with radiatively inefficient accretion flows // *Astron. Astrophys.* 2024. Vol. 682. P. A113.

86. Saurabh, Bambhaniya P., Joshi P. S. Probing the Shadow Image of the Sagittarius A* with Event Horizon Telescope. 2022. 1.
87. Shadows and precession of orbits in rotating Janis–Newman–Winicour space-time / D. N. Solanki, P. Bambhaniya, D. Dey et al. // *Eur. Phys. J. C.* 2022. Vol. 82, no. 1. P. 77.
88. Shadow of a Naked Singularity without Photon Sphere / A. B. Joshi, D. Dey, P. S. Joshi et al. // *Phys. Rev. D.* 2020. Vol. 102, no. 2. P. 024022.
89. Perlick V., Tsupko O. Y. Calculating black hole shadows: Review of analytical studies // *Phys. Rept.* 2022. Vol. 947. P. 1–39.
90. Shadows of Lorentzian traversable wormholes / F. Rahaman, K. N. Singh, R. Shaikh et al. // *Class. Quant. Grav.* 2021. Vol. 38, no. 21. P. 215007.
91. Shadows of spherically symmetric black holes and naked singularities / R. Shaikh, P. Kocherlakota, R. Narayan et al. // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 2019. Vol. 482, no. 1. P. 52–64.
92. Heydarzade Y., Vertogradov V. Dynamical photon spheres in charged black holes and naked singularities // *Eur. Phys. J. C.* 2024. Vol. 84, no. 6. P. 582.
93. Vagnozzi S. et al. Horizon-scale tests of gravity theories and fundamental physics from the Event Horizon Telescope image of Sagittarius A // *Class. Quant. Grav.* 2023. Vol. 40, no. 16. P. 165007.
94. Tsupko O. Y., Fan Z., Bisnovaty-Kogan G. S. Black hole shadow as a standard ruler in cosmology // *Class. Quant. Grav.* 2020. Vol. 37, no. 6. P. 065016.
95. Vagnozzi S., Bambi C., Visinelli L. Concerns regarding the use of black hole shadows as standard rulers // *Class. Quant. Grav.* 2020. Vol. 37, no. 8. P. 087001.
96. Perlick V., Tsupko O. Y., Bisnovaty-Kogan G. S. Influence of a plasma on the shadow of a spherically symmetric black hole // *Phys. Rev. D.* 2015. Vol. 92, no. 10. P. 104031.

97. Perlick V., Tsupko O. Y. Light propagation in a plasma on Kerr spacetime. II. Plasma imprint on photon orbits // *Phys. Rev. D.* 2024. Vol. 109, no. 6. P. 064063.
98. Bisnovatyi-Kogan G. S., Tsupko O. Y. Gravitational Lensing in Plasmic Medium // *Plasma Phys. Rep.* 2015. Vol. 41. P. 562.
99. Vertogradov V., Övgün A. Analyzing the influence of geometrical deformation on photon sphere and shadow radius: A new analytical approach — Spherically symmetric spacetimes // *Phys. Dark Univ.* 2024. Vol. 45. P. 101541.
100. Vertogradov V., Övgün A., Pantig R. C. Analyzing the Influence of Geometrical Deformation on Photon Sphere and Shadow Radius: A New Analytical Approach -Stationary, and Axisymmetric Spacetime // *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* 2025. Vol. 2. P. 2540001.
101. Conformal symmetries in generalised Vaidya spacetimes / S. Ojako, R. Goswami, S. D. Maharaj et al. // *Class. Quant. Grav.* 2020. Vol. 37, no. 5. P. 055005.
102. Vertogradov V., Kudryavcev D. Generalized Vaidya spacetime: Horizons, conformal symmetries, surface gravity and diagonalization // *Mod. Phys. Lett. A.* 2023. Vol. 38, no. 24n25. P. 2350119.
103. Koh S., Park M., Sherif A. M. Thermodynamics with conformal Killing vector in the charged Vaidya metric // *JHEP.* 2020. Vol. 24. P. 028.
104. Solanki J., Perlick V. Photon sphere and shadow of a time-dependent black hole described by a Vaidya metric // *Phys. Rev. D.* 2022. Vol. 105, no. 6. P. 064056.
105. Dynamical photon sphere and time evolving shadow around black holes with temporal accretion / Y. Koga, N. Asaka, M. Kimura et al. // *Phys. Rev. D.* 2022. Vol. 105, no. 10. P. 104040.
106. Vertogradov V. On the particle collisions during gravitational collapse of Vaidya spacetimes // *Phys. Complex Syst.* 2023. Vol. 4, no. 1. P. 17–23.

107. Vertogradov V. Extraction energy from charged Vaidya black hole via the Penrose process // Commun. Theor. Phys. 2023. Vol. 75, no. 4. P. 045404.
108. Vertogradov V., Övgün A. Analytical approach for calculating shadow of dynamical black hole. 2024. 12.
109. Penrose R., Floyd R. M. Extraction of rotational energy from a black hole // Nature. 1971. Vol. 229. P. 177–179.
110. Denardo G., Ruffini R. On the energetics of Reissner Nordström geometries // Phys. Lett. B. 1973. Vol. 45. P. 259–262.
111. Dynamics of test particles around a Bardeen black hole surrounded by perfect fluid dark matter / B. Narzilloev, J. Rayimbaev, S. Shaymatov et al. // Phys. Rev. D. 2020. Vol. 102, no. 10. P. 104062.
112. Pryadilin T., Zhitov D., Vertogradov V. On Particle Collisions in the Vicinity of Charged Black Holes // Grav. Cosmol. 2024. Vol. 30, no. 1. P. 48–56.
113. Grib A. A., Pavlov Y. V., Vertogradov V. D. Geodesics with negative energy in the ergosphere of rotating black holes // Mod. Phys. Lett. A. 2014. Vol. 29. P. 1450110.
114. Vertogradov V. Geodesics for particles with negative energy in Kerr's metric // Grav. Cosmol. 2015. Vol. 21, no. 2. P. 171–174.
115. Zaslavskii O. B. Circular orbits and acceleration of particles by near-extremal dirty rotating black holes: general approach // Class. Quant. Grav. 2012. Vol. 29. P. 205004.
116. Vertogradov V., Shleiger L. On Geodesic motion of particles with zero energy in Kerr and rotating dirty black holes. 2024. 10.
117. Zaslavskii O. B. On geodesics with negative energies in the ergoregions of dirty black holes // Mod. Phys. Lett. A. 2015. Vol. 30, no. 10. P. 1550055.
118. Pradhan P. Regular Black Holes as Particle Accelerators. 2014. 2.

119. Zaslavskii O. B. Acceleration of particles by black holes as a result of deceleration: Ultimate manifestation of kinematic nature of BSW effect // *Phys. Lett. B.* 2012. Vol. 712. P. 161–164.
120. Zaslavskii O. B. Energy extraction from extremal charged black holes due to the BSW effect // *Phys. Rev. D.* 2012. Vol. 86. P. 124039.
121. Vertogradov V., Shakun A. V., Zakharov M. A. Black hole shadow: Experimental test of different models and shadow of dynamical Hayward black hole // *Phys. Complex Syst.* 2024. Vol. 5, no. 3. P. 17–23.
122. Molina M., Villanueva J. R. On the thermodynamics of the Hayward black hole // *Class. Quant. Grav.* 2021. Vol. 38, no. 10. P. 105002.
123. Ghosh S. G., Amir M., Maharaj S. D. Ergosphere and shadow of a rotating regular black hole // *Nucl. Phys. B.* 2020. Vol. 957. P. 115088.
124. *Regular Black Holes. Towards a New Paradigm of Gravitational Collapse* / Ed. by C. Bambi. Springer Series in Astrophysics and Cosmology. Springer, 2023.
125. Hagedorn R. Statistical thermodynamics of strong interactions at high-energies // *Nuovo Cim. Suppl.* 1965. Vol. 3. P. 147–186.
126. Atick J. J., Witten E. The Hagedorn Transition and the Number of Degrees of Freedom of String Theory // *Nucl. Phys. B.* 1988. Vol. 310. P. 291–334.
127. Giddings S. B. Strings at the Hagedorn Temperature // *Phys. Lett. B.* 1989. Vol. 226. P. 55–61.
128. Grignani G., Orselli M., Semenoff G. W. The Target space dependence of the Hagedorn temperature // *JHEP.* 2001. Vol. 11. P. 058.
129. Maggiore M. Massive string modes and nonsingular pre - Big Bang cosmology // *Nucl. Phys. B.* 1998. Vol. 525. P. 413–431.
130. Magueijo J., Pogosian L. Could thermal fluctuations seed cosmic structure? // *Phys. Rev. D.* 2003. Vol. 67. P. 043518.

131. Aspects of string gas cosmology at finite temperature / B. A. Bassett, M. Borunda, M. Serone et al. // Phys. Rev. D. 2003. Vol. 67. P. 123506.
132. Malafarina D. Gravitational collapse of Hagedorn fluids // Phys. Rev. D. 2016. Vol. 93, no. 10. P. 104042.
133. Harko T. Gravitational collapse of a hagedorn fluid in vaidya geometry // Phys. Rev. D. 2003. Vol. 68. P. 064005.
134. Ovalle J. Decoupling gravitational sources in general relativity: from perfect to anisotropic fluids // Phys. Rev. D. 2017. Vol. 95, no. 10. P. 104019.
135. Ovalle J. Decoupling gravitational sources in general relativity: The extended case // Phys. Lett. B. 2019. Vol. 788. P. 213–218.
136. Contreras E., Ovalle J., Casadio R. Gravitational decoupling for axially symmetric systems and rotating black holes // Phys. Rev. D. 2021. Vol. 103, no. 4. P. 044020.
137. Hairy black holes by gravitational decoupling / J. Ovalle, R. Casadio, E. Contreras et al. // Phys. Dark Univ. 2021. Vol. 31. P. 100744.
138. Black holes by gravitational decoupling / J. Ovalle, R. Casadio, R. d. Rocha et al. // Eur. Phys. J. C. 2018. Vol. 78, no. 11. P. 960.
139. Ovalle J. Extending the geometric deformation: New black hole solutions // Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser. 2016. Vol. 41. P. 1660132.
140. Casadio R., Ovalle J., da Rocha R. a. The Minimal Geometric Deformation Approach Extended // Class. Quant. Grav. 2015. Vol. 32, no. 21. P. 215020.
141. Ovalle J., Casadio R., Giusti A. Regular hairy black holes through Minkowski deformation // Phys. Lett. B. 2023. Vol. 844. P. 138085.
142. Ovalle J., Contreras E., Stuchlik Z. Energy exchange between relativistic fluids: the polytropic case // Eur. Phys. J. C. 2022. Vol. 82, no. 3. P. 211.
143. Mahapatra S., Banerjee I. Rotating hairy black holes and thermodynamics from gravitational decoupling // Phys. Dark Univ. 2023. Vol. 39. P. 101172.

144. Sharif M., Ahmed S. Gravitationally decoupled non-static anisotropic spherical solutions // *Mod. Phys. Lett. A.* 2021. Vol. 36, no. 20. P. 2150145.
145. Traversable wormholes in minimally geometrical deformed trace-free gravity using gravitational decoupling / P. Panyasiripan, N. Kaewkhao, P. Channuie et al. // *Nucl. Phys. B.* 2024. Vol. 1004. P. 116563.
146. Geodesic motion around hairy black holes / A. Ramos, C. Arias, R. Avalos et al. // *Annals Phys.* 2021. Vol. 431. P. 168557.
147. Jha S. K., Rahaman A. Gravitational lensing by the hairy Schwarzschild black hole. 2022. 5.
148. Li Z., Yuan F. Energy extraction via Comisso-Asenjo mechanism from rotating hairy black hole // *Phys. Rev. D.* 2023. Vol. 108, no. 2. P. 024039.
149. Cavalcanti R. T., Alves K. d. S., Hoff da Silva J. M. Near-Horizon Thermodynamics of Hairy Black Holes from Gravitational Decoupling // *Universe.* 2022. Vol. 8, no. 7. P. 363.
150. Kiselev V. V. Quintessence and black holes // *Class. Quant. Grav.* 2003. Vol. 20. P. 1187–1198.
151. Visser M. The Kiselev black hole is neither perfect fluid, nor is it quintessence // *Class. Quant. Grav.* 2020. Vol. 37, no. 4. P. 045001.
152. Heydarzade Y., Misyura M., Vertogradov V. Hairy Kiselev black hole solutions // *Phys. Rev. D.* 2023. Vol. 108, no. 4. P. 044073.
153. Vaidya P. C. Nonstatic Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluids Radiating Energy // *Phys. Rev.* 1951. Vol. 83. P. 10–17.
154. Santos N. O. Non-adiabatic radiating collapse // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 1985. Vol. 216, no. 2. P. 403–410.
155. A RANDOM WALK IN RELATIVITY AND COSMOLOGY. ESSAYS IN HONOR OF P.C. VAIDYA AND A.K. RAYCHAUDHURI / Ed. by N. Dadhich, J. Krishna Rao, J. V. Narlikar et al. 1985.

156. Wang A., Wu Y. Generalized Vaidya solutions // *Gen. Rel. Grav.* 1999. Vol. 31. P. 107.
157. Herrera L., Di Prisco A., Ospino J. Some analytical models of radiating collapsing spheres // *Phys. Rev. D.* 2006. Vol. 74. P. 044001.
158. Herrera L., Le Denmat G., Santos N. O. Dynamical instability and the expansion-free condition // *Gen. Rel. Grav.* 2012. Vol. 44. P. 1143.
159. Dwivedi I. H., Joshi P. S. On the Nature of Naked Singularities in Vaidya Spacetimes // *Class. Quant. Grav.* 1989. Vol. 6. P. 1599–1606.
160. Babichev E., Dokuchaev V., Eroshenko Y. Backreaction of accreting matter onto a black hole in the Eddington-Finkelstein coordinates // *Class. Quant. Grav.* 2012. Vol. 29. P. 115002.
161. Nielsen Alex B. Revisiting Vaidya Horizons // *Galaxies.* 2014. T. 2, № 1. C. 62–71. URL: <https://www.mdpi.com/2075-4434/2/1/62>.
162. Pielahn M., Kunstatter G., Nielsen A. B. Dynamical Surface Gravity in Spherically Symmetric Black Hole Formation // *Phys. Rev. D.* 2011. Vol. 84. P. 104008.
163. Berezin V. A., Dokuchaev V. I., Eroshenko Yu. N. Vaidya spacetime in the diagonal coordinates // *J. Exp. Theor. Phys.* 2017. T. 124, № 3. C. 446–458.
164. Ibohal Ng., Kapil L. Charged black holes in Vaidya backgrounds: Hawking's Radiation // *Int. J. Mod. Phys. D.* 2010. T. 19. C. 437–464.
165. Horizon-bound objects: Kerr–Vaidya solutions / Pravin K. Dahal, Swayamsiddha Maharana, Fil Simovic [и др.] // *Gen. Rel. Grav.* 2025. T. 57, № 1. C. 20.
166. Ghosh Sushant G., Maharaj Sunil D. Radiating Kerr-like regular black hole // *Eur. Phys. J. C.* 2015. T. 75. C. 7.
167. Manna Goutam, Majumdar Parthasarathi, Majumder Bivash. k -essence emergent spacetime as a generalized Vaidya geometry // *Phys. Rev. D.* 2020. T. 101, № 12. C. 124034.

168. Manna Goutam. Gravitational Collapse for the K-essence Emergent Vaidya Spacetime // Eur. Phys. J. C. 2020. T. 80, № 9. C. 813.
169. Majumder Bivash, Ray Saibal, Manna Goutam. Evaporation of Dynamical Horizon with the Hawking Temperature in the K-essence Emergent Vaidya Spacetime // Fortsch. Phys. 2023. T. 71, № 10-11. C. 2300133.
170. Collapsing scenario for the k-essence emergent generalized Vaidya spacetime in the context of massive gravity's rainbow / Saibal Ray, Arijit Panda, Bivash Majumder [и др.] // Chin. Phys. C. 2022. T. 46, № 12. C. 125103.
171. Reddy K. P., Govender M., Maharaj S. D. Impact of anisotropic stresses during dissipative gravitational collapse // General Relativity and Gravitation. 2015. T. 47. C. 35. URL: <https://doi.org/10.1007/s10714-015-1880-x>.
172. Thirukkanesh S., Moopanar S., Govender M. The final outcome of dissipative collapse in the presence of Λ // Pramana J. Phys. 2012. T. 79. C. 223–232.
173. Thirukkanesh S., Govender M. The role of the electromagnetic field in dissipative collapse // Int. J. Mod. Phys. D. 2013. T. 22. C. 1350087.
174. Glass E. N., Krisch J. P. Radiation and string atmosphere for relativistic stars // Phys. Rev. D. 1998. T. 57. C. 5945–5947.
175. Glass E. N., Krisch J. P. Two fluid atmosphere for relativistic stars // Class. Quant. Grav. 1999. T. 16. C. 1175–1184.
176. Mkenyeleye Maombi D., Goswami Rituparno, Maharaj Sunil D. Gravitational collapse of generalized Vaidya spacetime // Phys. Rev. D. 2014. T. 90, № 6. C. 064034.
177. Thermodynamics of gravity favours Weak Censorship Conjecture / Giovanni Acquaviva, Rituparno Goswami, Aymen I. M. Hamid [и др.]. 2015.
178. Dey Dipanjan, Joshi Pankaj S. Gravitational Collapse of Baryonic and Dark matter // Arab. J. Math. 2019. T. 8, № 4. C. 269–292.

179. Nikolaev A. V., Maharaj S. D. Embedding with Vaidya geometry // *Eur. Phys. J. C.* 2020. T. 80, № 7. C. 648.
180. Faraoni Valerio, Giusti Andrea, Fahim Bardia H. Vaidya geometries and scalar fields with null gradients // *Eur. Phys. J. C.* 2021. T. 81, № 3. C. 232.
181. Brassel Byron P., Maharaj Sunil D., Goswami Rituparno. Charged radiation collapse in Einstein–Gauss–Bonnet gravity // *Eur. Phys. J. C.* 2022. T. 82, № 4. C. 359.
182. Culetu Hristu. A Vaidya-type spacetime with no singularities // *Int. J. Mod. Phys. D.* 2022. T. 31, № 16. C. 2250124.
183. Vertogradov V. Does a primary hair have an impact on the naked singularity formation in hairy Vaidya spacetime? // *Phys. Complex Syst.* 2024. Vol. 5, no. 2. P. 83–90.
184. Vertogradov V. Non-linearity of Vaidya spacetime and forces in the central naked singularity. // *Phys. Complex Syst.* 2022. Vol. 3, no. 2. P. 17–23.
185. Vertogradov Vitalii. Forces in Schwarzschild, Vaidya and generalized Vaidya spacetimes // *J. Phys. Conf. Ser.* 2021. T. 2081, № 1. C. 012036.
186. Vertogradov Vitalii. The diagonalization of generalized Vaidya spacetime // *Int. J. Mod. Phys. A.* 2020. T. 35, № 02n03. C. 2040033.
187. Vertogradov V. The nature of the naked singularity in generalized Vaidya spacetime and white hole geodesics // *Phys. Complex Syst.* 2021. Vol. 2, no. 1.
188. Vertogradov V. Some remarks on the naked singularity phenomenon // *Phys. Complex Syst.* 2020. Vol. 1, no. 1.
189. Vertogradov Vitalii, Misyura Maxim. Vaidya and Generalized Vaidya Solutions by Gravitational Decoupling // *Universe.* 2022. T. 8, № 11. C. 567.
190. Vertogradov Vitalii, Rincon Angel. Energy extraction and evolution of regular black holes: The case of Bardeen spacetime // *Phys. Dark Univ.* 2025. T. 50. C. 102066.

191. CHAKRABARTI SANDIP K., JOSHI PANKAJ S. NAKED SINGULARITIES AS CANDIDATES FOR GAMMA-RAY BURSTERS // International Journal of Modern Physics D. 1994. T. 03, № 03. C. 647–651.
192. Vertogradov Vitalii. The eternal naked singularity formation in the case of gravitational collapse of generalized Vaidya space–time // Int. J. Mod. Phys. A. 2018. T. 33, № 17. C. 1850102.
193. Vertogradov Vitalii. The structure of the generalized Vaidya space–time containing the eternal naked singularity // Int. J. Mod. Phys. A. 2022. T. 37, № 28n29. C. 2250185.
194. Vertogradov Vitalii. The Negative Energy in Generalized Vaidya Spacetime // Universe. 2020. T. 6, № 9. C. 155.
195. Nielsen Alex B. The Spatial relation between the event horizon and trapping horizon // Class. Quant. Grav. 2010. T. 27. C. 245016.
196. Krishnan Badri. Quasi-local black hole horizons // Springer Handbook of Spacetime / под ред. Abhay Ashtekar, Vesselin Petkov. 2014. C. 527–555.
197. Hawking S. W. Particle Creation by Black Holes // 1st Oxford Conference on Quantum Gravity. 1975. 8.
198. Husain Viqar. Exact solutions for null fluid collapse // Phys. Rev. D. 1996. T. 53. C. 1759–1762.
199. Vertogradov V. D. Naked singularity formation in generalized Vaidya space–time // Grav. Cosmol. 2016. T. 22, № 2. C. 220–223.
200. Vertogradov Vitalii. Gravitational collapse of Vaidya spacetime // Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser. 2016. T. 41. C. 1660124.
201. Dynamical systems applied to cosmology: dark energy and modified gravity / Sebastian Bahamonde, Christian G. Böhrer, Sante Carloni [и др.] // Phys. Rept. 2018. T. 775-777. C. 1–122.
202. Vertogradov Vitalii. The generalized Vaidya spacetime with polytropic equation of state // Gen. Rel. Grav. 2024. T. 56, № 5. C. 59.

203. Wagh S. M., Maharaj S. D. Naked singularity of the Vaidya-de Sitter space-time and cosmic censorship conjecture // *Gen. Rel. Grav.* 1999. T. 31. C. 975–982.
204. Heydarzade Y., Darabi F. Surrounded Vaidya black holes: apparent horizon properties // *Eur. Phys. J. C.* 2018. T. 78, № 4. C. 342.
205. Heydarzade Y., Darabi F. Surrounded Vaidya solution by cosmological fields // *Eur. Phys. J. C.* 2018. T. 78, № 7. C. 582.
206. Heydarzade Y., Darabi F. Surrounded Bonnor–Vaidya solution by cosmological fields // *Eur. Phys. J. C.* 2018. T. 78, № 12. C. 1004.
207. Dymnikova Irina. Cosmological term as a source of mass // *Class. Quant. Grav.* 2002. T. 19. C. 725–740.
208. Bonnor W. B., Vaidya P. C. Spherically symmetric radiation of charge in Einstein-Maxwell theory // *Gen. Rel. Grav.* 1970. T. 1. C. 127–130.
209. Ori A. Charged null fluid and the weak energy condition // *Classical and Quantum Gravity.* 1991. T. 8, № 8. C. 1559. URL: <https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/8/8/019>.
210. Chatterjee Soumyabrata, Ganguli Suman, Virmani Amitabh. Charged Vaidya Solution Satisfies Weak Energy Condition // *Gen. Rel. Grav.* 2016. T. 48, № 7. C. 91.
211. Riess Adam G. [и др.]. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant // *Astron. J.* 1998. T. 116. C. 1009–1038.
212. Ratra Bharat, Peebles P. J. E. Cosmological Consequences of a Rolling Homogeneous Scalar Field // *Phys. Rev. D.* 1988. T. 37. C. 3406.
213. Cosmic concordance and quintessence / Li-Min Wang, R. R. Caldwell, J. P. Ostriker [и др.] // *Astrophys. J.* 2000. T. 530. C. 17–35.
214. Caldwell R. R. A Phantom menace? // *Phys. Lett. B.* 2002. T. 545. C. 23–29.

215. Interacting phantom dark energy: new accelerating scaling attractors / Sudip Halder, S. D. Odintsov, Supriya Pan [и др.]. 2024.
216. Inhomogeneous chaplygin gas cosmology / Neven Bilic, Robert J. Lindebaum, Gary B. Tupper [и др.] // 15th Rencontres de Blois on Physical Cosmology: New Results in Cosmology and the Coherence of the Standard Model. 2005. С. 169–172.
217. Bordemann Martin, Hoppe Jens. The Dynamics of relativistic membranes. 1. Reduction to two-dimensional fluid dynamics // Phys. Lett. B. 1993. Т. 317. С. 315–320.
218. Ogawa Naohisa. A Note on classical solution of Chaplygin gas as d-branes // Phys. Rev. D. 2000. Т. 62. С. 085023.
219. Makler Martin, Quinet de Oliveira Sergio, Waga Ioav. Constraints on the generalized Chaplygin gas from supernovae observations // Phys. Lett. B. 2003. Т. 555. С. 1.
220. Singularity-free solutions for anisotropic charged fluids with Chaplygin equation of state / Farook Rahaman, Saibal Ray, Abdul Kayum Jafry [и др.] // Phys. Rev. D. 2010. Т. 82. С. 104055.
221. Bhar Piyali, Govender Megan, Sharma Ranjan. Anisotropic stars obeying Chaplygin equation of state // Pramana. 2018. Т. 90, № 1. С. 5.
222. Panotopoulos Grigorios, Rincón Ángel, Lopes Ilídio. Radial oscillations and tidal Love numbers of dark energy stars // Eur. Phys. J. Plus. 2020. Т. 135, № 10. С. 856.
223. Relativistic anisotropic fluid spheres satisfying a non-linear equation of state / Francisco Tello-Ortiz, M. Malaver, Ángel Rincón [и др.] // Eur. Phys. J. C. 2020. Т. 80, № 5. С. 371.
224. Panotopoulos Grigoris, Rincón Ángel, Lopes Ilídio. Slowly rotating dark energy stars // Phys. Dark Univ. 2021. Т. 34. С. 100885.

225. Prasad Amit Kumar, Kumar Jitendra, Sarkar Abhijit. Behavior of anisotropic fluids with Chaplygin equation of state in Buchdahl spacetime // *Gen. Rel. Grav.* 2021. T. 53, № 12. C. 108.
226. Aad Georges [и др.]. Observation of four-top-quark production in the multilepton final state with the ATLAS detector // *Eur. Phys. J. C.* 2023. T. 83, № 6. C. 496. [Erratum: *Eur.Phys.J.C* 84, 156 (2024)].
227. Jyothilakshmi O. P., Naik Lakshmi J., Sreekanth V. Non-radial oscillations in anisotropic dark energy stars // *Eur. Phys. J. C.* 2024. T. 84, № 4. C. 427.
228. V. Vertogradov V. D. Some mathematical and physical aspects of the gravitational collapse of massive stars // *Proceedings of The Multifaceted Universe: Theory and Observations*,. 2022. Vol. 425, no. 024.
229. Vertogradov Vitalii. Dynamical black holes: Apparent horizon versus energy conditions // *Phys. Lett. B.* 2025. T. 867. C. 139607.
230. Vertogradov Vitalii, Övgün Ali. Regular black hole models in the transition from baryonic matter to quark matter // *JCAP.* 2025. T. 06. C. 051.
231. Vertogradov Vitalii. Gravitational collapse and formation of regular black holes: Dymnikova, Hayward, and beyond // *Eur. Phys. J. C.* 2025. T. 85, № 8. C. 839.
232. Newman E. T., Janis A. I. Note on the Kerr spinning particle metric // *J. Math. Phys.* 1965. T. 6. C. 915–917.
233. Azreg-Ainou Mustapha. Regular and conformal regular cores for static and rotating solutions // *Phys. Lett. B.* 2014. T. 730. C. 95–98.
234. Bambi Cosimo. Can the supermassive objects at the centers of galaxies be traversable wormholes? The first test of strong gravity for mm/sub-mm very long baseline interferometry facilities // *Phys. Rev. D.* 2013. T. 87. C. 107501.

235. Jaroszynski M., Kurpiewski A. Optics near kerr black holes: spectra of advection dominated accretion flows // *Astron. Astrophys.* 1997. T. 326. C. 419.
236. Narayan Ramesh, Yi In-su. Advection dominated accretion: A Selfsimilar solution // *Astrophys. J. Lett.* 1994. T. 428. C. L13.
237. Narayan Ramesh, Yi Insu. Advection dominated accretion: Underfed black holes and neutron stars // *Astrophys. J.* 1995. T. 452. C. 710.
238. Bisnovaty-Kogan G. S., Klepnev A. S., Lovelace R. V. E. Accretion into black holes with magnetic fields, and relativistic jets // *Odessa Astron. Pub.* 2011. T. 24. C. 54–58.
239. Lindquist R. W., Schwartz R. A., Misner C. W. Vaidya's Radiating Schwarzschild Metric // *Phys. Rev.* 1965. T. 137. C. B1364–B1368.
240. Vertogradov V., Övgün A. General approach on shadow radius and photon spheres in asymptotically flat spacetimes and the impact of mass-dependent variations // *Phys. Lett. B.* 2024. Vol. 854. P. 138758.
241. Vertogradov V., Misyura M., Bambhaniya P. Influence of primary hair and plasma on intensity distribution of black hole shadows // *Eur. Phys. J. Plus.* 2025. Vol. 140, no. 1. P. 23.