

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
БАЛТИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И. КАНТА
ПРИЕМНАЯ КОМИССИЯ БФУ ИМ. И. КАНТА

Программа
для подготовки к вступительному испытанию по
МАТЕМАТИКЕ

Калининград
2020

Лист согласования

Составитель: профессор института физико-математических наук и информационных технологий Худенко Владимир Николаевич.

Программа обсуждена и утверждена на заседании приемной и аттестационной комиссий Протокол №___ от «___» _____ г.

Ответственный секретарь приемной комиссии

ПРЕДИСЛОВИЕ

При поступлении абитуриенту необходима серьезная подготовка по математике, в связи с чем мы надеемся, что настоящее пособие будет полезно поступающим.

В первом разделе пособия перечислены основные математические понятия, которыми должен владеть поступающий на письменном экзамене.

Второй раздел представляет собой перечень вопросов экзамена. При подготовке к письменному экзамену целесообразно познакомиться с формулировками утверждений из этого раздела.

В третьем разделе указано, какие навыки и умения требуются от поступающего на экзамене по математике. Объем знаний и степень владения материалом, описанным в программе, соответствуют курсу математики средней школы. Поступающий может пользоваться всем арсеналом средств курса, включая начала анализа. Объекты и факты, не изучаемые в общеобразовательной школе, также могут использоваться поступающим, но при условии, что он способен пояснить и обосновать их.

В связи с обилием учебников и регулярным их переизданием отдельные вопросы второго раздела могут в некоторых учебниках звучать иначе, чем в программе, или формулироваться в виде задач, или вообще отсутствовать. Такие случаи не освобождают поступающего от необходимости знать эти вопросы.

Начиная, с 2016 года, собственные вступительные испытания по математике в БФУ им. И. Канта проводятся в виде тестов. В тестовом задании 6 задач, которые надо решить за 2 часа и ввести с клавиатуры компьютера ответ. Предусмотрено 2 вида тестовых заданий: выбор варианта ответа или короткий ответ (нужно ввести число, как правило, целое).

В четвертом разделе приведен пример выполнения тестового задания.

1. ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ И ФАКТЫ

Арифметика, алгебра и начала анализа

1. Натуральные числа (N). Понятие делимости, делителя и кратного. Простые и составные числа. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное совокупности чисел. Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9, 10.

2. Целые числа (Z). Рациональные числа (Q) и арифметические действия над ними. Сравнение рациональных чисел. Действительные числа (R), их представление в виде десятичных дробей. Интерпретация действительных чисел точками на прямой. Модуль действительного числа, его свойства и геометрический смысл.

3. Степень с натуральным, целым отрицательным и рациональным показателем. Арифметический корень. Числовые и буквенные выражения. Формулы сокращенного умножения.

4. Логарифмы и их свойства.

5. Одночлен и многочлен. Многочлен с одной переменной. Корни многочлена на примере квадратного трехчлена.

6. Понятие функции. Способы задания функции, ее область определения и множество значений. График функции. Возрастание, убывание, периодичность, четность и нечетность.

7. Определение производной. Ее физический и геометрический смыслы.

8. Производные основных элементарных функций. Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного двух функций.

9. Достаточное условие возрастания (убывания) функции на промежутке. Понятие экстремума функции. Необходимое условие экстремума функции (теорема Ферма). Достаточное условие экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке.

10. Определение и основные свойства линейной, квадратичной $y = ax^2 + bx + c$, степенной $y = ax^n$ ($n \in N$, $n = -1$, $n = \frac{1}{2}$), показательной $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), логарифмической и тригонометрических $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ функций. Понятие арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса.

11. Уравнения, корни уравнения. Равносильность уравнений.

12. Неравенства. Решение неравенств. Равносильность неравенств.

13. Системы уравнений. Системы и совокупности неравенств. Решение системы и совокупности неравенств.

14. Метод математической индукции.

15. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Их характеристические свойства. Формулы n -х членов и сумм n первых членов прогрессий. Бесконечная убывающая геометрическая прогрессия.

16. Геометрические и тригонометрические определения $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$.

Геометрия

17. Прямая, луч, отрезок, ломаная; длина отрезка. Угол, величина угла. Вертикальные и смежные углы. Параллельные прямые.

18. Примеры преобразований фигур, виды симметрий. Преобразование подобия и его свойства.

19. Векторы. Операции над векторами. Прямоугольные декартовы координатные системы на плоскости и в пространстве. Операции над векторами в координатных системах.

20. Многоугольник, его вершины, стороны, диагонали.

21. Треугольник. Медиана, биссектриса и высота в треугольнике. Виды треугольников.

22. Четырехугольники: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция.

23. Окружность и круг. Центр, хорда, диаметр, радиус, касательная к окружности, сектор и сегмент круга. Вписанные и описанные фигуры.

24. Центральный угол, вписанный угол; угол, образованный касательной к окружности и хордой, двумя хордами, двумя секущими.

25. Формулы площадей: треугольника, параллелограмма, ромба, трапеции, круга, сектора и сегмента. Формула *Герона*. Формула длины окружности.

26. Расположение прямой и плоскости в пространстве. Двугранный угол.

27. Многогранник. Куб, параллелепипед, призма, пирамида.

28. Цилиндр, конус, сфера и шар.

29. Площади поверхностей многогранников. Объемы многогранников.

30. Площади поверхностей и объемы цилиндра, конуса и шара.

2. СОДЕРЖАНИЕ ЭКЗАМЕНА

Алгебра и начала анализа

1. Свойства числовых неравенств.
2. Свойства линейной функции $y=kx+b$ и ее график.
3. Свойства функции $y=\frac{k}{x}$ и ее график.
4. Свойства функции $y=ax^2+bx+c$ и ее график.
5. Формулы корней квадратного уравнения. Теорема о разложении квадратного трехчлена на линейные множители. Теоремы *Виета* (прямая и обратная).
6. Определение арифметической прогрессии, формула общего члена арифметической прогрессии. Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии.
7. Определение геометрической прогрессии, формула общего члена геометрической прогрессии. Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии.
8. Основное логарифмическое тождество, логарифм произведения, степени, частного. Формулы перехода к новому основанию.
9. Свойства логарифмической функции и ее график.
10. Свойства показательной функции и ее график.
11. Формулы приведения.
12. Свойства и графики функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$.
13. Свойства и графики функций $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$.
14. Основные соотношения, связывающие тригонометрические функции одного аргумента.
15. Формулы $\cos(\alpha\pm\beta)$ и $\sin(\alpha\pm\beta)$.
16. Формулы $\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)$ и $\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)$.
17. Тригонометрические функции двойного аргумента.
18. Формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведения.
19. Формулы преобразования произведений $\cos\alpha\cdot\cos\beta$, $\sin\alpha\cdot\sin\beta$, $\sin\alpha\cdot\cos\beta$ в суммы.
20. Формулы, выражающие $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.
21. Решение уравнений вида $\sin x=a$, $\cos x=a$, ($|a|\leq 1$). Определения арксинуса и арккосинуса.
22. Решение уравнений вида $\operatorname{tg} x=a$, $\operatorname{ctg} x=a$. Определения арктангенса и арккотангенса.

Геометрия

23. Теорема о сумме внутренних углов треугольника.
24. Теорема о величине внешнего угла треугольника.
25. Теорема о сумме внутренних углов выпуклого многоугольника.
26. Теорема Пифагора.
27. Теорема косинусов для треугольника.
28. Теорема о вписанной в треугольник окружности.
29. Теорема об окружности, описанной около треугольника.
30. Теорема синусов для треугольника.
31. Теоремы об измерении вписанного в окружность угла, образованного двумя хордами, и угла, образованного двумя секущими.
32. Теорема о биссектрисе внутреннего угла треугольника.
33. Признаки равенства треугольников.
34. Признаки подобия треугольников.
35. Средняя линия треугольника и ее свойства.
36. Средняя линия трапеции и ее свойства.
37. Свойства равнобедренного треугольника.
38. Признаки и свойства параллелограмма.
39. Определение и свойства ромба.
40. Формулы площадей треугольника, параллелограмма и трапеции.
41. Формула вычисления радиуса вписанной в треугольник окружности.
42. Формула вычисления радиуса описанной около треугольника окружности.
43. Формула площади правильного многоугольника. Формула, связывающая длину стороны правильного многоугольника с радиусом описанной около него окружности.
44. Формула, связывающая длину стороны правильного многоугольника и радиус вписанной в него окружности.
45. Свойства четырехугольника, описанного около окружности.
46. Формула расстояния между двумя точками на плоскости. Уравнение окружности.
47. Признак (необходимое и достаточное условия) скрещивающихся прямых.
48. Признак перпендикулярности прямой и плоскости.
49. Признак параллельности прямой и плоскости.
50. Признак перпендикулярности двух плоскостей.
51. Признак параллельности двух плоскостей.

52. Теорема о трех перпендикулярах.
53. Теорема о площади боковой поверхности прямой и наклонной призмы.
54. Теорема о площади боковой поверхности правильной пирамиды, правильной усеченной пирамиды.
55. Признак коллинеарности двух векторов.
56. Признак компланарности трех векторов.
57. Теорема о разложении вектора по трем некопланарным векторам.
58. Координатные системы на плоскости в пространстве.
59. Скалярное произведение векторов и его свойства.
60. Теорема о касательной к сфере плоскости.

3. ТРЕБОВАНИЯ К ПОСТУПАЮЩЕМУ

На экзамене по математике поступающий должен уметь:

- 1) производить (без калькулятора) действия над числами и числовыми выражениями; преобразовывать буквенные выражения; производить операции над векторами (сложение, умножение вектора на число); переводить одни единицы измерения в другие;
- 2) сравнивать числа и находить их приближенные значения (без калькулятора); доказывать тождества и неравенства для буквенных выражений;
- 3) решать уравнения, неравенства и системы (в том числе с параметрами) и исследовать их решения;
- 4) исследовать функции, строить графики функций и множества точек, заданные на координатной плоскости с помощью уравнений и неравенств;
- 5) изображать геометрические фигуры на чертеже; производить дополнительные построения; строить сечения; исследовать взаимное расположение фигур; применять признаки равенства, подобия фигур и их принадлежности к тому или иному виду;
- 6) пользоваться свойствами чисел, векторов, функций и их графиков, свойствами арифметической и геометрической прогрессий;
- 7) пользоваться свойствами геометрических фигур, их характерных точек, линий, частей; свойствами равенства, подобия и взаимного расположения фигур;
- 8) пользоваться соотношениями и формулами, содержащими модули, степени, корни, логарифмические и тригонометрические выражения, величины углов, длины, площади, объемы;
- 9) составлять уравнения, неравенства и находить значения величин, исходя из условия задачи;
- 10) излагать и оформлять решение логически правильно, полно и последовательно, с необходимыми пояснениями.

На экзамене поступающий должен дополнительно уметь:

- 11) давать определения, формулировать и доказывать утверждения, формулы, соотношения, теоремы, признаки, свойства и т. п., указанные во втором разделе настоящей программы;
- 12) анализировать формулировки утверждений и их доказательства;

13) решать задачи на построение с помощью циркуля и линейки;
находить геометрические места точек.

РАЗДЕЛ 4. Примерный вариант теста.

Задание 1. Решите уравнение $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3} = 0$ и введите с клавиатуры наименьшее значение из полученных решений.

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x + 2 = 0, \\ x^2 + 4x + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 3 \neq 0, \\ x = -1, \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2. \quad (-1 \text{ не является корнем, т.к. при } x = -1 \quad x^2 + 4x + 3 = 0)$$

Значение -2 , является единственным корнем (и наименьшим и наибольшим!), поэтому с клавиатуры вводим -2 .

Задание 2. Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$\frac{(x+2)(x+1)^2}{(x+\frac{1}{2})(x-1)^2\sqrt{6-x}} \leq 0$$

Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{x+2}{x+\frac{1}{2}} \leq 0, \\ x \neq 1, \\ x = -1, \\ 6-x > 0 \end{cases}$$

В результате получаем, что $x \in \left[-2; -\frac{1}{2}\right)$. На этом множестве только два целочисленных решения: -2 и -1 .

С клавиатуры вводим 2 .

Задание 3.

Два велосипедиста одновременно отправились в 224-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 2 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 2 часа раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Выберите правильный ответ (в км/ч).

20
18
21

Решение:

Составляем таблицу

	Скорость (км/час)	Расстояние	Время
1 велосипедист	$x+2$	224	$\frac{224}{x+2}$
2 велосипедист	x	224	$\frac{224}{x}$

Из условия задачи следует уравнение

$$\frac{224}{x+2} + 2 = \frac{224}{x}$$

Решаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{112}{x+2} + 1 &= \frac{112}{x} \\ \frac{112+x+2}{x+2} &= \frac{112}{x} \quad \frac{114+x}{x+2} = \frac{112}{x} \\ \frac{(114+x)x - (x+2)112}{x(x+2)} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 224 = 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq -2. \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \pm \sqrt{1+224}, \\ x \neq 0, \\ x \neq -2. \end{cases} \quad \begin{cases} x = 14, \\ x = -16. \end{cases}$$

В соответствии со смыслом задачи скорость равна 14 км/час.

Из предложенных вариантов выбираем **14**

Задание 4. Вычислить производную функции $f(x) = (2x^3 + 5)^4$ в точке $x_0=0$

Решение

Находим производную

$$f'(x) = 4(2x^3 + 5)^3 \cdot (2x^3 + 5)' = 4(2x^3 + 5)^3 \cdot 6x^2$$

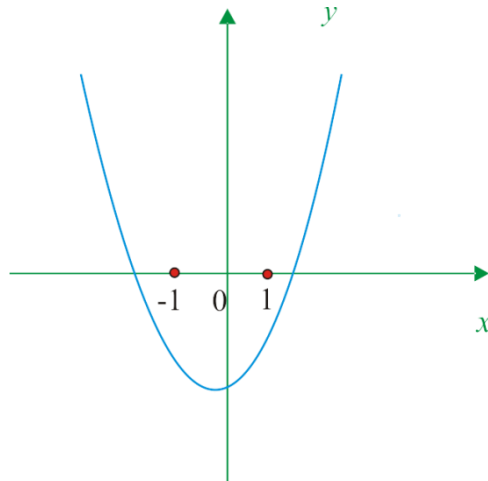
При $x=0$ получаем, что и значение производной равно нулю. Из предложенных вариантов ответа

0
7
-4
3

выбираем первый ответ.

Задание 5. Найти все значения параметра a , при которых все корни уравнения $a^2x^2 - ax - 2 = 0$ лежат вне отрезка $[-1;1]$. Введите количество целочисленных решений из полученного множества значений параметра.

Решение: Изобразим эскиз графика левой части уравнения

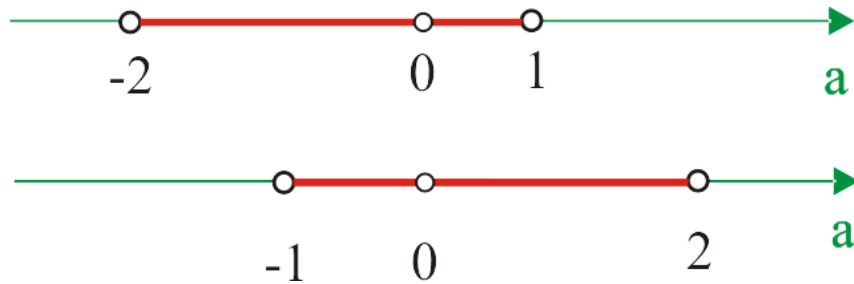


Если $a \neq 0$, то уравнение имеет корни разных знаков (свободный член уравнения $-2 < 0$).

Необходимые и достаточные условия имеют вид:

$$\begin{cases} a \neq 0, \\ f(-1) < 0, \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \\ a^2 + a - 2 < 0, \\ a^2 + a - 2 < 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \\ (a+2)(a-1) < 0, \\ (a+1)(a-2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \\ -2 < a < 1, \\ -1 < a < 2. \end{cases}$$



Пользуясь методом интервалов, ищем пересечение и получаем множество $a \in (-1; 0) \cup (0; 1)$. Это множество не содержит целых чисел.

Вводим с клавиатуры 0

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Константинова О.Г., Кремер Н.Ш., Фридман М.Н.* Математика для поступающих в экономические и другие вузы – М.: Юнити-Дана, 2007.
2. *Хорошилова Е.В.* Элементарная математика: Учебное пособие для слушателей подготовительных отделений, абитуриентов и старшеклассников. Часть 2. – М.: Издательство Московского университета, 2011
3. *Садовничий В.А.* - гл.ред. Справочник школьника и его учителя Программа "МГУ - школе". М. : Издательство Московского университета, 2010
4. *Попов Ю. И.* Практикум: II. Тригонометрия: учеб. пособие. — Калининград: ОАО «КГТ», 2004.
5. *Попов Ю. И.* Алгебра: Методы и приемы решения задач элементарной математики: учеб. пособие. — Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2006.