



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования «Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта»
(БФУ им. И. Канта)

Программа вступительного испытания
по общеобразовательной дисциплине
«МАТЕМАТИКА»

Калининград
2025

ПРЕДИСЛОВИЕ

При поступлении абитуриенту необходима серьезная подготовка по математике, в связи с чем мы надеемся, что настоящее пособие будет полезно поступающим.

В первом разделе пособия перечислены основные математические понятия, которыми должен владеть поступающий на письменном экзамене.

Второй раздел представляет собой перечень вопросов экзамена. При подготовке к письменному экзамену целесообразно познакомиться с формулировками утверждений из этого раздела.

В третьем разделе указано, какие навыки и умения требуются от поступающего на экзамене по математике. Объем знаний и степень владения материалом, описанным в программе, соответствуют курсу математики средней школы. Поступающий может пользоваться всем арсеналом средств курса, включая начала анализа. Объекты и факты, не изучаемые в общеобразовательной школе, также могут использоваться поступающим, но при условии, что он способен пояснить и обосновать их.

В связи с обилием учебников и регулярным их переизданием отдельные вопросы второго раздела могут в некоторых учебниках звучать иначе, чем в программе, или формулироваться в виде задач, или вообще отсутствовать. Такие случаи не освобождают поступающего от необходимости знать эти вопросы.

Начиная с 2016 года, собственные вступительные испытания по математике в БФУ им. И. Канта проводятся в виде тестов. В тестовом задании 12 задач, которые надо решить за 2 часа и ввести с клавиатуры компьютера ответ. Предусмотрено 2 вида тестовых заданий: выбор варианта ответа или короткий ответ (нужно ввести число, как правило, целое).

В четвертом разделе приведен пример выполнения тестового задания.

1. ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ И ФАКТЫ

Арифметика, алгебра и начала анализа

1. Натуральные числа (N). Понятие делимости, делителя и кратного. Простые и составные числа. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное совокупности чисел. Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9, 10.

2. Целые числа (Z). Рациональные числа (Q) и арифметические действия над ними. Сравнение рациональных чисел. Действительные числа (R), их представление в виде десятичных дробей. Интерпретация действительных чисел точками на прямой. Модуль действительного числа, его свойства и геометрический смысл.

3. Степень с натуральным, целым отрицательным и рациональным показателем. Арифметический корень. Числовые и буквенные выражения. Формулы сокращенного умножения.

4. Логарифмы и их свойства.

5. Одночлен и многочлен. Многочлен с одной переменной. Корни многочлена на примере квадратного трехчлена.

6. Понятие функции. Способы задания функции, ее область определения и множество значений. График функции. Возрастание, убывание, периодичность, четность и нечетность.

7. Определение производной. Ее физический и геометрический смыслы.

8. Производные основных элементарных функций. Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного двух функций.

9. Достаточное условие возрастания (убывания) функции на промежутке. Понятие экстремума функции. Необходимое условие экстремума функции (теорема Ферма). Достаточное условие экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке.

10. Определение и основные свойства линейной, квадратичной $y = ax^2 + bx + c$, степенной $y = ax^n$ ($n \in N$, $n = -1$, $n = \frac{1}{2}$), показательной $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), логарифмической и тригонометрических $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ функций. Понятие арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса.

11. Уравнения, корни уравнения. Равносильность уравнений.

12. Неравенства. Решение неравенств. Равносильность неравенств.

13. Системы уравнений. Системы и совокупности неравенств. Решение системы и совокупности неравенств.

14. Метод математической индукции.

15. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Их характеристические свойства. Формулы n -х членов и сумм n первых членов прогрессий. Бесконечная убывающая геометрическая прогрессия.

16. Геометрические и тригонометрические определения $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$.

Геометрия

17. Прямая, луч, отрезок, ломаная; длина отрезка. Угол, величина угла. Вертикальные и смежные углы. Параллельные прямые.

18. Примеры преобразований фигур, виды симметрий. Преобразование подобия и его свойства.

19. Векторы. Операции над векторами. Прямоугольные декартовы координатные системы на плоскости и в пространстве. Операции над векторами в координатных системах.

20. Многоугольник, его вершины, стороны, диагонали.

21. Треугольник. Медиана, биссектриса и высота в треугольнике. Виды треугольников.

22. Четырехугольники: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция.

23. Окружность и круг. Центр, хорда, диаметр, радиус, касательная к окружности, сектор и сегмент круга. Вписанные и описанные фигуры.

24. Центральный угол, вписанный угол; угол, образованный касательной к окружности и хордой, двумя хордами, двумя секущими.

25. Формулы площадей: треугольника, параллелограмма, ромба, трапеции, круга, сектора и сегмента. Формула *Герона*. Формула длины окружности.

26. Расположение прямой и плоскости в пространстве. Двугранный угол.

27. Многогранник. Куб, параллелепипед, призма, пирамида.

28. Цилиндр, конус, сфера и шар.

29. Площади поверхностей многогранников. Объемы многогранников.

30. Площади поверхностей и объемы цилиндра, конуса и шара.

2. СОДЕРЖАНИЕ ЭКЗАМЕНА

Алгебра и начала анализа

1. Свойства числовых неравенств.
2. Свойства линейной функции $y=kx+b$ и ее график.
3. Свойства функции $y=\frac{k}{x}$ и ее график.
4. Свойства функции $y=ax^2+bx+c$ и ее график.
5. Формулы корней квадратного уравнения. Теорема о разложении квадратного трехчлена на линейные множители. Теоремы *Виета* (прямая и обратная).
6. Определение арифметической прогрессии, формула общего члена арифметической прогрессии. Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии.
7. Определение геометрической прогрессии, формула общего члена геометрической прогрессии. Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии.
8. Основное логарифмическое тождество, логарифм произведения, степени, частного. Формулы перехода к новому основанию.
9. Свойства логарифмической функции и ее график.
10. Свойства показательной функции и ее график.
11. Формулы приведения.
12. Свойства и графики функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$.
13. Свойства и графики функций $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$.
14. Основные соотношения, связывающие тригонометрические функции одного аргумента.
15. Формулы $\cos(\alpha\pm\beta)$ и $\sin(\alpha\pm\beta)$.
16. Формулы $\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)$ и $\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)$.
17. Тригонометрические функции двойного аргумента.
18. Формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведения.
19. Формулы преобразования произведений $\cos\alpha\cdot\cos\beta$, $\sin\alpha\cdot\sin\beta$, $\sin\alpha\cdot\cos\beta$ в суммы.
20. Формулы, выражающие $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.
21. Решение уравнений вида $\sin x=a$, $\cos x=a$, ($|a|\leq 1$). Определения арксинуса и арккосинуса.
22. Решение уравнений вида $\operatorname{tg} x=a$, $\operatorname{ctg} x=a$. Определения арктангенса и арккотангенса.

Геометрия

23. Теорема о сумме внутренних углов треугольника.
24. Теорема о величине внешнего угла треугольника.
25. Теорема о сумме внутренних углов выпуклого многоугольника.
26. Теорема Пифагора.
27. Теорема косинусов для треугольника.
28. Теорема о вписанной в треугольник окружности.
29. Теорема об окружности, описанной около треугольника.
30. Теорема синусов для треугольника.
31. Теоремы об измерении вписанного в окружность угла, образованного двумя хордами, и угла, образованного двумя секущими.
32. Теорема о биссектрисе внутреннего угла треугольника.
33. Признаки равенства треугольников.
34. Признаки подобия треугольников.
35. Средняя линия треугольника и ее свойства.
36. Средняя линия трапеции и ее свойства.
37. Свойства равнобедренного треугольника.
38. Признаки и свойства параллелограмма.
39. Определение и свойства ромба.
40. Формулы площадей треугольника, параллелограмма и трапеции.
41. Формула вычисления радиуса вписанной в треугольник окружности.
42. Формула вычисления радиуса описанной около треугольника окружности.
43. Формула площади правильного многоугольника. Формула, связывающая длину стороны правильного многоугольника с радиусом описанной около него окружности.
44. Формула, связывающая длину стороны правильного многоугольника и радиус вписанной в него окружности.
45. Свойства четырехугольника, описанного около окружности.
46. Формула расстояния между двумя точками на плоскости. Уравнение окружности.
47. Признак (необходимое и достаточное условия) скрещивающихся прямых.
48. Признак перпендикулярности прямой и плоскости.
49. Признак параллельности прямой и плоскости.
50. Признак перпендикулярности двух плоскостей.
51. Признак параллельности двух плоскостей.

52. Теорема о трех перпендикулярах.
53. Теорема о площади боковой поверхности прямой и наклонной призмы.
54. Теорема о площади боковой поверхности правильной пирамиды, правильной усеченной пирамиды.
55. Признак коллинеарности двух векторов.
56. Признак компланарности трех векторов.
57. Теорема о разложении вектора по трем некопланарным векторам.
58. Координатные системы на плоскости в пространстве.
59. Скалярное произведение векторов и его свойства.
60. Теорема о касательной к сфере плоскости.

3. ТРЕБОВАНИЯ К ПОСТУПАЮЩЕМУ

На экзамене по математике поступающий должен уметь:

- 1) производить (без калькулятора) действия над числами и числовыми выражениями; преобразовывать буквенные выражения; производить операции над векторами (сложение, умножение вектора на число); переводить одни единицы измерения в другие;
- 2) сравнивать числа и находить их приближенные значения (без калькулятора); доказывать тождества и неравенства для буквенных выражений;
- 3) решать уравнения, неравенства и системы (в том числе с параметрами) и исследовать их решения;
- 4) исследовать функции, строить графики функций и множества точек, заданные на координатной плоскости с помощью уравнений и неравенств;
- 5) изображать геометрические фигуры на чертеже; производить дополнительные построения; строить сечения; исследовать взаимное расположение фигур; применять признаки равенства, подобия фигур и их принадлежности к тому или иному виду;
- 6) пользоваться свойствами чисел, векторов, функций и их графиков, свойствами арифметической и геометрической прогрессий;
- 7) пользоваться свойствами геометрических фигур, их характерных точек, линий, частей; свойствами равенства, подобия и взаимного расположения фигур;
- 8) пользоваться соотношениями и формулами, содержащими модули, степени, корни, логарифмические и тригонометрические выражения, величины углов, длины, площади, объемы;
- 9) составлять уравнения, неравенства и находить значения величин, исходя из условия задачи;
- 10) излагать и оформлять решение логически правильно, полно и последовательно, с необходимыми пояснениями.

На экзамене поступающий должен дополнительно уметь:

- 11) давать определения, формулировать и доказывать утверждения, формулы, соотношения, теоремы, признаки, свойства и т. п., указанные во втором разделе настоящей программы;
- 12) анализировать формулировки утверждений и их доказательства;

13) решать задачи на построение с помощью циркуля и линейки;
находить геометрические места точек.

РАЗДЕЛ 4. Примерный вариант теста.

Задание 1. Решите уравнение $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3} = 0$ и введите с клавиатуры наименьшее значение из полученных решений.

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^2 + 3x + 2 = 0, \\ |x^2 + 4x + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 3 \neq 0, \\ \left\{ \begin{array}{l} x = -1, \\ x = -2 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow x = -2. \quad (-1 \text{ не является корнем, т.к. при } x = -1 \quad x^2 + 4x + 3 = 0)$$

Значение -2 , является единственным корнем (и наименьшим и наибольшим!), поэтому с клавиатуры вводим **-2**.

Задание 2. Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$\frac{(x+2)(x+1)^2}{(x+\frac{1}{2})(x-1)^2\sqrt{6-x}} \leq 0$$

Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{x+2}{x+\frac{1}{2}} \leq 0, \\ 2 \\ x \neq 1, \\ x = -1, \\ \left. \begin{array}{l} 6-x > 0 \\ -2; -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \end{cases}$$

В результате получаем, что $x \in \left[-2; -\frac{1}{2} \right)$. На этом множестве только два целочис-

ленных решения: -2 и -1 .

С клавиатуры вводим **2**.

Задание 3.

Два велосипедиста одновременно отправились в 224-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 2 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 2 часа раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Выберите правильный ответ (в км/ч).

20
18
21

Решение:

Составляем таблицу

	Скорость (км/час)	Расстояние	Время
1 велосипедист	$x+2$	224	$\frac{224}{x+2}$
2 велосипедист	x	224	$\frac{224}{x}$

Из условия задачи следует уравнение

$$\frac{224}{x+2} + 2 = \frac{224}{x}$$

Решаем уравнение

$$\frac{112}{x+2} + 1 = \frac{112}{x}$$

$$\frac{112+x+2}{x+2} = \frac{112}{x} \quad \frac{114+x}{x+2} = \frac{112}{x}$$

$$\frac{(114+x)x - (x+2)112}{x(x+2)} = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 224 = 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq -2. \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \pm \sqrt{1+224}, \\ x \neq 0, \\ x \neq -2. \end{cases} \quad \begin{cases} x = 14, \\ x = -16. \end{cases}$$

В соответствии со смыслом задачи скорость равна 14 км/час.

Из предложенных вариантов выбираем **14**

Задание 4. Вычислить производную функции $f(x) = (2x^3 + 5)^4$ в точке $x_0=0$

Решение

Находим производную

$$f'(x) = 4(2x^3 + 5)^3 \cdot (2x^3 + 5)' = 4(2x^3 + 5)^3 \cdot 6x^2$$

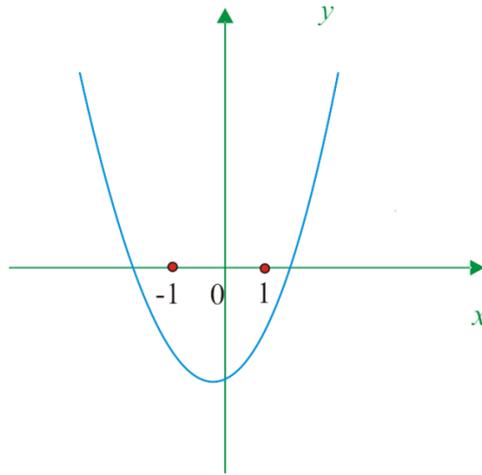
При $x=0$ получаем, что и значение производной равно нулю. Из предложенных вариантов ответа

0
7
-4
3

выбираем первый ответ.

Задание 5. Найти все значения параметра a , при которых все корни уравнения $a^2x^2 - ax - 2 = 0$ лежат вне отрезка $[-1;1]$. Введите количество целочисленных решений из полученного множества значений параметра.

Решение: Изобразим эскиз графика левой части уравнения

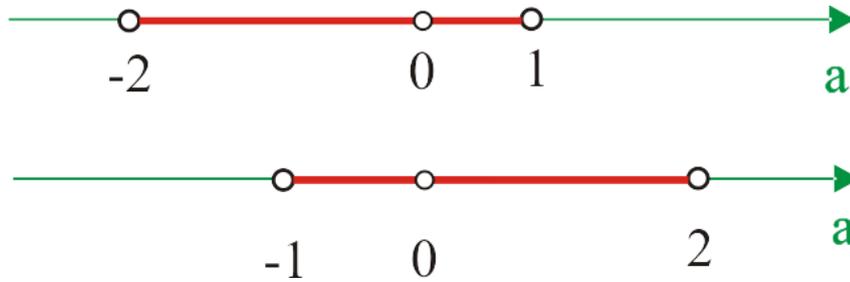


Если $a \neq 0$, то уравнение имеет корни разных знаков (свободный член уравнения $-2 < 0$).

Необходимые и достаточные условия имеют вид:

$$\begin{cases} a \neq 0, \\ f(-1) < 0, \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \\ a^2 + a - 2 < 0, \\ a^2 + a - 2 < 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \\ (a+2)(a-1) < 0, \\ (a+1)(a-2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \\ -2 < a < 1, \\ -1 < a < 2. \end{cases}$$



Пользуясь методом интервалов, ищем пересечение и получаем множество $a \in (-1; 0) \cup (0; 1)$. Это множество не содержит целых чисел.

Вводим с клавиатуры 0

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Константинова О.Г., Кремер Н.Ш., Фридман М.Н.* Математика для поступающих в экономические и другие вузы – М.: Юнити-Дана, 2007.
2. *Хорошилова Е.В.* Элементарная математика: Учебное пособие для слушателей подготовительных отделений, абитуриентов и старшеклассников. Часть 2. – М.: Издательство Московского университета, 2011
3. *Садовничий В.А.* - гл.ред. Справочник школьника и его учителя Программа "МГУ - школе". М. : Издательство Московского университета, 2010
4. *Попов Ю. И.* Практикум: II. Тригонометрия: учеб. пособие. — Калининград: ОАО «КГТ», 2004.
5. *Попов Ю. И.* Алгебра: Методы и приемы решения задач элементарной математики: учеб. пособие. — Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2006.